

U10362 Ballistisches Pendel

Bedienungsanleitung

9/04 MH

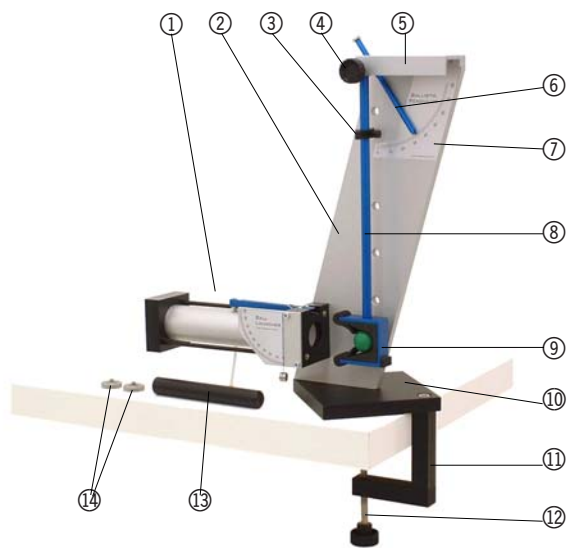


Fig. 1: Komponenten

- ① Wurfgerät (U10360)
- ② Trägerplatte
- ③ Mitnehmer für Schleppzeiger
- ④ Lagerschraube
- ⑤ Gegenlager
- ⑥ Schleppzeiger
- ⑦ Winkelskala
- ⑧ Pendel
- ⑨ Kugelfänger
- ⑩ Grundplatte
- ⑪ Tischklemme
- ⑫ Rändelschraube
- ⑬ Ladestock (bei U10360)
- ⑭ Zusatzgewichte, 2 Stück

1. Sicherheitshinweise

- In dieser Bedienungsanleitung wird im wesentlichen auf das ballistische Pendel eingegangen, die Bedienungsanleitung des Wurfgerätes U10360 ist ebenfalls zu beachten.
- Zum Überprüfen, ob sich eine Kugel im Wurfgerät befindet und die Feder gespannt ist, sind ausschließlich die seitlichen Beobachtungsbohrungen zu nutzen. Es ist verboten, von vorn in die Mündung zu sehen. Verletzungsgefahr!
- Niemals auf Menschen zielen!
- Während der Versuche ist eine Schutzbrille zu tragen.
- Das Wurfgerät immer mit entspannter Feder und ohne Kugel im Lauf lagern.

2. Beschreibung

- Das ballistische Pendel dient zur experimentellen Bestimmung der Anfangsgeschwindigkeit der Kugel beim Austritt aus dem Wurfgerät. Weiterhin können Wurfparabeln beim horizontalen oder schiefen Wurf ermittelt werden, wobei Abwurfhöhen von 5, 10, 15, 20 und 30 cm einfach durch vorgegebene Bohrungen eingestellt werden können.

- Durch das extrem leichte Pendel können die Versuche mit vergleichsweise ungefährlichen Kunststoffkugeln – statt Stahlkugeln – durchgeführt werden. Dabei sind sowohl die Versuche zum plastischen (quantitativ) als auch zum elastischen (qualitativ) Stoß auswertbar. Die aus Wurf- und Pendelversuchen ermittelten Kugelgeschwindigkeiten stimmen typischerweise auf etwa 3% überein.
- Durch Zusatzgewichte können unterschiedliche Pendelausschläge bei konstanter Kugelgeschwindigkeit untersucht werden.

3. Bedienung und Wartung

- Zunächst wird das ballistische Pendel mit der Tischklemme an eine stabile Arbeitsplatte geschraubt. Dann wird das Wurfgerät entweder wie in Fig. 1 gezeigt horizontal vor das Pendel oder wie in Fig. 3 zu sehen ist von hinten an die Trägerplatte ② geschraubt.

Tipp: Wenn die Arbeitsplatte nicht stabil genug ist, kann es vorkommen, dass nach dem Maximalausschlag des Pendels beim Zurückschwingen desselben ein Ruck durch den Aufprall gegen das Wurfgerät auftritt, der zur Verstellung des Schleppzeigers

führt. In diesem Fall sollte das Pendel von Hand abgefangen werden.

- Das Laden des Wurfgerätes mit einer Kugel erfolgt immer bei entspannter Feder, indem eine Kugel lose in den vorderen Teil des inneren Kunststoffzylinders gelegt wird. Danach wird die Kugel mit dem Ladestock in den Lauf geschoben, bis die gewünschte Federspannung erreicht ist. Das Herausziehen des Ladestocks sollte nicht zu schnell erfolgen, da andernfalls der entstehende Sog die Kugel mitreißen könnte. Eine Kontrolle der Kugelposition darf nur durch die seitlichen Beobachtungsböhrungen erfolgen. Nie in den Lauf blicken!
- Vor dem Abwurf ist sicherzustellen, dass sich keine Personen in der Flugbahn befinden. Zum Abwurf wird kurz an der Schnur des Abzugshebels gezogen, wobei der Zug etwa senkrecht zum Hebel erfolgen sollte.
- Das Pendel ⑧ kann durch Lösen der Lagerschraube ④ abgebaut und um 180° gedreht mit der Rückseite des Kugelfängers ⑨ zum Wurfgerät zeigend wieder eingebaut werden (Versuche zum elastischen Stoß). Das Gegenlager ⑤ ist so konstruiert, dass das Pendel bei nur sehr leicht angezogener Lagerschraube etwas schief hängt, wodurch sich der Kugelfänger nicht exakt vor der Mündung des Wurfgerätes befindet. Daher ist die Lagerschraube solange anzuziehen, bis Kugelfänger und Mündung fluchten.
- Nach dem Umdrehen des Pendels oder bei Bedarf ist der Mitnehmer ③ für den Schleppzeiger ⑥ so einzustellen, dass er den Schleppzeiger gerade berührt, wenn das Pendel ruhig hängt. Die Schraube des Mitnehmers sollte nur mit den Fingern gedreht werden, um Druckstellen im Pendelstab zu vermeiden.
- **Wartung:** Das ballistische Pendel ist prinzipiell wartungsfrei. Bei Bedarf kann etwas säurefreies Fett (Vaseline) an die Lagerschraube ④ und die Rändelschraube ⑫ gegeben werden. Außer im Bereich der Skala kann es ggf. mit Aceton, Ethanol (Spiritus) oder Waschbenzin gereinigt werden. Das Eintauchen in Wasser ist zu vermeiden.

4. Versuchsdurchführung und Auswertung

4.1 Ballistisches Pendel

4.1.1 Versuchsaufbau

- Der Versuchsaufbau entspricht Fig. 1 für Versuche zum plastischen Stoß. Für Versuche zum elastischen Stoß ist das Pendel um 180° zu drehen (vergl. Abschnitt 3 „Bedienung“)

4.1.2 Versuchsdurchführung

- Es ist zweckmäßig, bei den Versuchen die Versuchsnummer, die Federspannung (1, 2 oder 3), die Stoßart (plastisch „p“ oder elastisch „e“), die Anzahl der verwendeten Zusatzgewichte sowie den Winkelmesswert φ zu notieren. Um möglichst genaue Versuchsergebnisse zu erhalten, sollte nach dem ersten Schuss noch ein weiterer

abgegeben werden, wobei der Schleppzeiger nicht auf 0° zurückgestellt wird. Auf diese Weise werden die unvermeidlichen Reibungsverluste des Schleppzeigers minimiert.

- Beispiel einer Versuchsreihe:

| Nr. | Federspannung | Stoßart | Zusatzgewichte | Winkel φ |
|-----|---------------|---------|----------------|------------------|
| 1 | 1 | p | 0 | 17,5 |
| 2 | 2 | p | 0 | 25,0 |
| 3 | 3 | p | 0 | 36,0 |
| 4 | 1 | p | 2 | 9,5 |
| 5 | 2 | p | 2 | 13,5 |
| 6 | 3 | p | 2 | 19,0 |
| 7 | 1 | e | 0 | 29,5 |
| 8 | 2 | e | 0 | 42,0 |
| 9 | 3 | e | 0 | 60,0 |

4.1.3 Versuchsauswertung

4.1.3.1 Plastischer Stoß

- Für das schwingende Pendel gilt der Energieerhaltungssatz in der Form

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{kin}} \quad (1)$$

wobei für die potentielle Energie

$$E_{\text{pot}} = m_{\text{ges}} g \Delta h \quad (2)$$

gilt. Hier ist m_{ges} die Gesamtmasse des Pendels incl. Kugel und ggf. Zusatzgewichten, g ist die Erdbeschleunigung und Δh ist die Höhendifferenz des Pendelschwerpunktes zwischen Ruhelage und maximaler Auslenkung.

- Mit dem gemessenen Winkel φ und der gemessenen Schwerpunktlänge l_s gemäß Fig. 2 ergibt sich:

$$\Delta h = l_s (1 - \cos \varphi) \quad (3)$$

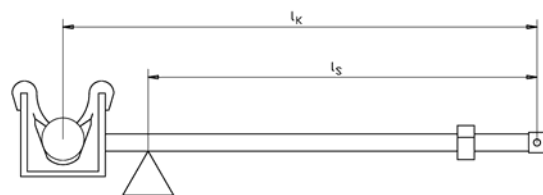


Fig. 2: Zur Auswertung benötigte Längen. Der Abstand „Schwerpunkt - Drehpunkt“ (l_s) ist beim plastischen Stoß incl. Kugel und Zusatzgewichten zu messen. Zur Messung kann das Pendel beispielsweise auf einem hochkant gestellten Lineal ausbalanciert werden. Der Abstand „Kugelmittle - Drehpunkt“ beträgt $l_k = 280$ mm.

- Die kinetische Energie berechnet sich mit dem Trägheitsmoment I_{ges} bezogen auf den Pendel-Drehpunkt und der maximalen Winkelgeschwindigkeit ω gemäß

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} I_{\text{ges}} \omega^2 \quad (4)$$

- Werden die Gln. 2 und 4 in Gl. 1 eingesetzt und

Δh durch Gl. 3 eliminiert, dann folgt nach Umformung:

$$\omega = \sqrt{\frac{2 m_{\text{ges}} g l_s (1 - \cos \varphi)}{I_{\text{ges}}}} \quad (5)$$

- Gesucht ist aber nicht ω , sondern die Anfangsgeschwindigkeit der Kugel v_0 . Der Zusammenhang zwischen den beiden Größen ergibt sich aus dem Drehimpulserhaltungssatz (Drallerhaltung) unmittelbar vor und nach dem Stoß:

$$L_k = L_{\text{ges}} \quad (6)$$

mit dem „Drall“ der Kugel

$$L_k = m_k l_k v_0 \quad (7)$$

vor dem Stoß und dem Gesamtdrall

$$L_{\text{ges}} = I_{\text{ges}} \omega \quad (8)$$

nach dem Stoß. Einsetzen der Gln. 7 und 8 in Gl. 6 ergibt

$$m_k l_k v_0 = I_{\text{ges}} \omega \quad (9)$$

- Dies nach ω aufgelöst und mit Gl. 5 gleichgesetzt führt auf den gesuchten Zusammenhang

$$v_0 = \frac{1}{m_k l_k} \sqrt{2 I_{\text{ges}} m_{\text{ges}} g l_s (1 - \cos \varphi)} \quad (10)$$

- Das Trägheitsmoment ist prinzipiell gemäß

$$I_{\text{ges}} = \int_m l^2 dm \quad (11)$$

zu ermitteln, wobei l der jeweilige Abstand eines Massenelements dm vom Drehpunkt ist. Da hier nicht die Ermittlung von Trägheitsmomenten Ziel der Betrachtungen ist, kann I_{ges} auch aus der Schwingungsdauer T des Pendels (mit Kugel und ggf. Zusatzgewichten) berechnet werden. Für ein physikalisches Pendel gilt bei kleinen Ausschlägen¹:

$$I_{\text{ges}} = m_{\text{ges}} g l_s \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \quad (12)$$

- Damit sind jetzt alle Größen bekannt oder berechenbar. Für obiges Beispiel ergibt sich:

| Nr. | m_k / kg | $m_{\text{ges}} / \text{kg}$ | l_s / m | T / s | v_0 in m/s |
|-----|-------------------|------------------------------|------------------|----------------|--------------|
| 1 | 0,00695 | 0,06295 | 0,218 | 1,01 | 3,39 |
| 2 | 0,00695 | 0,06295 | 0,218 | 1,01 | 4,82 |
| 3 | 0,00695 | 0,06295 | 0,218 | 1,01 | 6,88 |
| 4 | 0,00695 | 0,09795 | 0,252 | 1,07 | 3,51 |
| 5 | 0,00695 | 0,09795 | 0,252 | 1,07 | 4,98 |
| 6 | 0,00695 | 0,09795 | 0,252 | 1,07 | 6,99 |

- Die Zahlenwerte sollten für jedes Pendel individuell ermittelt werden, da es durch Material- und Fertigungstoleranzen zu Abweichungen kommen kann.

4.1.3.2 Elastischer Stoß

- Für das schwingende Pendel nach dem Stoß gilt weiterhin Gl. 5 mit dem Unterschied, dass hier das Trägheitsmoment des Pendels ohne Kugel I_p aber ggf. mit Zusatzgewichten (Pendelmasse m_p) zu berücksichtigen ist:

$$\omega = \sqrt{\frac{2 m_p g l_s (1 - \cos \varphi)}{I_p}} \quad (13)$$

- Zur Ermittlung des Zusammenhangs zwischen ω und der Anfangsgeschwindigkeit v_0 stehen jetzt aber sowohl der Drehimpulserhaltungssatz als auch der Energieerhaltungssatz, jeweils unmittelbar vor und nach dem Stoß, zur Verfügung. Die weitere Gleichung ist auch erforderlich, da das System einen weiteren Freiheitsgrad hat: die Kugelgeschwindigkeit v_2 nach dem Stoß. Analog zu Gl. 9 ergibt sich für die Drehimpulse:

$$m_k l_k v_0 = m_k l_k v_2 + I_p \omega$$

\Leftrightarrow

$$v_2 = v_0 - \frac{I_p \omega}{m_k l_k} \quad (14)$$

- Wird diese Geschwindigkeit v_2 in den Energieerhaltungssatz

$$\frac{1}{2} m_k v_0^2 = \frac{1}{2} m_k v_2^2 + \frac{1}{2} I_p \omega^2 \quad (15)$$

eingesetzt, ergibt sich nach einigen Umformungen v_0 zu

$$v_0 = \frac{1}{2} \omega l_k \left(1 + \frac{I_p}{m_k l_k^2} \right) \quad (16)$$

- Wird hier noch Gl. 13 eingesetzt und I_p analog zu Gl. 12 bestimmt, ist v_0 für einen vollkommen elastischen Stoß berechenbar:

| Nr. | m_k / kg | m_p / kg | l_s / m | T / s | v_0 in m/s |
|-----|-------------------|-------------------|------------------|----------------|--------------|
| 7 | 0,00695 | 0,0560 | 0,211 | 1,008 | 2,88 |
| 8 | 0,00695 | 0,0560 | 0,211 | 1,008 | 4,05 |
| 9 | 0,00695 | 0,0560 | 0,211 | 1,008 | 5,65 |

- Diese Werte für v_0 sind um ca. 18% kleiner als die aus dem plastischen Stoß ermittelten, was darauf zurückzuführen ist, dass der Stoß nicht vollkommen elastisch verläuft.

¹ Recknagel, A.: Physik Mechanik, 3te Auflage, VEB Verlag Technik Berlin, 1958.

4.2 Ermittlung von Wurfparabeln

4.2.1 Versuchsaufbau

- Ein möglicher Versuchsaufbau ist in Fig. 3 schematisch (nicht maßstabsgerecht) dargestellt. Die Bohrungen in der Trägerplatte des Pendels sind so angebracht, dass sich beim Wurf direkt auf die Arbeitsplatte die Abwurfhöhen 50, 100, 150, 200 und 300 mm ergeben.

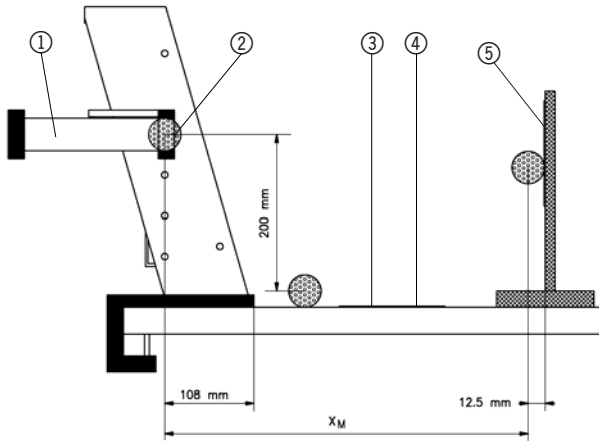


Fig. 3: Versuchsaufbau, Legende: ① Wurfgerät, ② Abwurfposition der Kugel, ③ Papier, ④ Kohlepapier, ⑤ z. B. Tafelhalter mit Weißwandtafel

- Beim Wurf gegen eine vertikale Wand (z.B. Weißwandtafel U10030 an Tafelhalter U10381 montiert) ist von der horizontalen Entfernung „Abwurfpunkt bis Wand“ der Kugelradius (1,25 cm) abzuziehen, um den Entfernungsmesswert x_M zu erhalten. Der Höhenmesswert y_M relativ zur Abschusshöhe ergibt sich aus der Entfernung „Auftrittspunkt an der Wand bis Tischplatte“ abzüglich 62,5 mm, 112,5 mm, 162,5 mm, 212,5 mm bzw. 312,5 mm je nach verwendeter Bohrung.

4.2.2 Versuchsdurchführung

- Es ist zweckmäßig, bei den Versuchen die Versuchsnummer, die Federspannung (1, 2 oder 3), den Abwurfwinkel sowie die Werte x_M und y_M zu notieren. Beispiel:

| Nr. | Feder- spannung | Abwurf- winkel $\varphi / ^\circ$ | Wurfweite x_M / cm | Zielhöhe y_M / cm |
|-----|--------------------|--------------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|
| 1 | 1 | 0 | 171,3 | -30 |
| 2 | 2 | 0 | 125,4 | -30 |
| 3 | 3 | 0 | 86,9 | -30 |
| 4 | 1 | 0 | 62,3 | -15 |
| 5 | 2 | 0 | 90,5 | -15 |
| 6 | 3 | 0 | 120,7 | -15 |

4.1.3 Versuchsauswertung

- Der Ursprung des Koordinatensystems wird zweckmäßigerweise in den Kugelmittelpunkt beim Abwurf gelegt. Dann gilt:

$$v_x = v_0 \cos \varphi \quad (17)$$

$$v_y = v_0 \sin \varphi \quad (18)$$

$$y = v_y t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (19)$$

$$x = v_x t \quad (20)$$

aus Gl. 20 folgt direkt $t = x / v_x$, womit die Zeit in Gl. 19 eliminiert werden kann.

- Werden in der so erhaltenen Gleichung noch die Größen v_x und v_y unter Verwendung der Gln. 17 und 18 eliminiert, ergibt sich mit

$$y = x \tan \varphi - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} \quad (21)$$

die Gleichung der Wurfparabel.

- In dieser Gleichung ist nur noch die Anfangsgeschwindigkeit v_0 unbekannt, da in den Versuchen die Wege x und y gemessen wurden. Wird v_0 für die verschiedenen Versuche bestimmt ergibt sich:

| Federspannung | v_0 in m/s |
|---------------|--------------|
| 1 | 3,53 |
| 2 | 5,10 |
| 3 | 6,85 |

- Diese Zahlenwerte basieren auf insgesamt 25 Versuchen, von denen in obiger Tabelle nur 6 explizit angegeben sind. mit diesen Werten können jetzt Wurfparabeln nach Gl. 21 berechnet und den Messwerten gegenübergestellt werden. Das Ergebnis ist in Fig. 4 dargestellt.

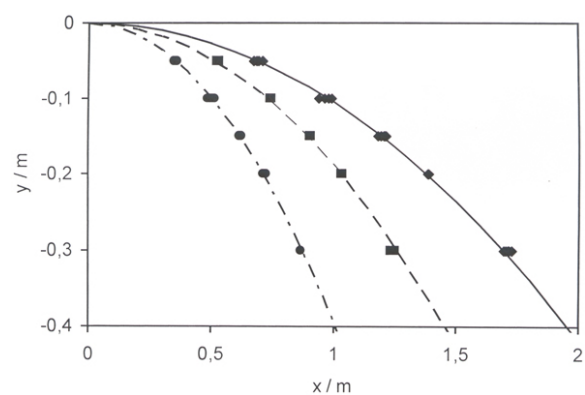
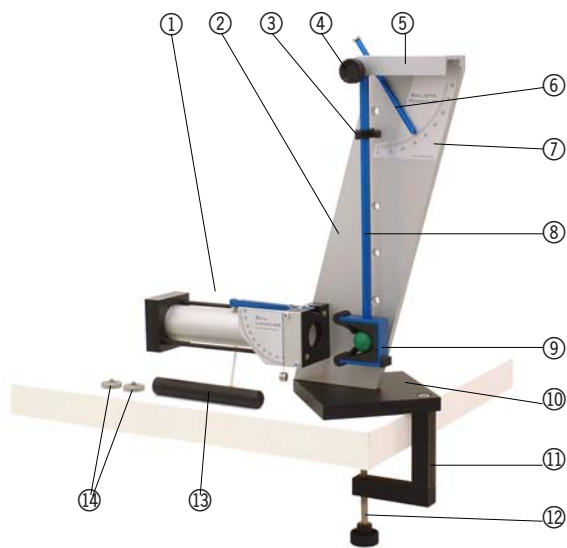


Fig. 4: Messwerte und Berechnung im Vergleich, x = Flugweite, y = Flughöhe, Symbole = Messwerte (Kreise = Feder-
spannung 1, Quadrate = Feder-
spannung 2, Rauten = Feder-
spannung 3), Linien = berechnete Parabeln

U10362 Ballistic pendulum

Instruction sheet

9/04 MH



- ① Projectile launcher (U10360)
- ② Back plate
- ③ Guide for swing pointer
- ④ Bearing screw
- ⑤ Counter bearing
- ⑥ Swing pointer
- ⑦ Angle scale
- ⑧ Pendulum
- ⑨ Projectile catcher
- ⑩ Base plate
- ⑪ Table clamp
- ⑫ Knurled screw
- ⑬ Ramrod (for U10360)
- ⑭ Extra weights, 2 pcs.

Fig. 1: Components

1. Safety instructions

- This instruction sheet is concerned mainly with the ballistic pendulum. You should also read the instructions for the projectile launcher U10360.
- To check whether a projectile is located in the projectile launcher and the spring is cocked, only use the observation holes at the sides. Do not look into the barrel from the front. Risk of injury!
- Never aim at people!
- Protective goggles should be worn during the experiments.
- The projectile launcher should always be stored with the spring loose and with no projectile in the barrel.

2. Description

- The ballistic pendulum is for experiment-based determination of the launch velocity of a projectile when it leaves the projectile launcher. It is also possible to determine trajectories when the projectile is launched horizontally or at an angle. Launch heights of 5, 10, 15, 20 or 30 cm can be selected easily with the aid of the drilled holes.
- Thanks to the extreme lightness of the pendulum, the experiment can be performed using compar-

tively safe plastic projectiles instead of steel balls. Experiments involving inelastic collisions (quantitatively) and elastic collisions (qualitatively) can be evaluated. The velocity of the projectiles determined from trajectory and pendulum experiments typically agree to within about 3%.

- Extra weights allow various pendulum travels to be investigated for constant speeds.

3. Operation and maintenance

- First the ballistic pendulum is screwed to a stable bench by means of its clamp. The projectile launcher is then screwed to the back plate ② from behind either in a horizontal position in front of the pendulum as in Fig. 1 or as shown in Fig 3.
Tip: if the workbench is not stable enough, it may be that when the pendulum swings to its maximum extent and then swings back, it may jog the apparatus when striking the projectile launcher, causing the swing pointer to be shifted out of line. If this happens, the pendulum should rather be stopped by hand.
- Projectiles should always be loaded when the spring is not under tension by placing the sphere in loosely through the front of the plastic cylinder

within the device. The sphere is then pushed down inside the barrel using the ramrod until the desired spring tension has been reached. The ramrod should not be removed too quickly, otherwise the suction its removal produces may pull the sphere out with it. The position of the sphere may only be checked using the observation holes. Never look into the barrel!

- Before launching, ensure that no one is in the way of the trajectory. To launch, the cord of the launching lever is briefly pulled perpendicularly to the lever.
- The pendulum ③ can be removed by undoing the bearing screw ④ and turned by 180° so that it is installed with the rear of the projectile catcher ⑨ pointing towards the launcher (experiments on elastic collision). The counter bearing ⑤ is designed so that the pendulum hangs at a slight angle if the bearing screw is only light tightened. This means that the projectile catcher is not precisely in front of the launch aperture of the launcher. For this reason, the bearing screw should be tightened until the catcher and the launch aperture are in line.
- After turning the pendulum round, or if necessary, the guide ③ for the swing pointer ⑥ should be adjusted so that the pointer just touches it when the pendulum is suspended at rest. The screw on the guide should only be finger-tightened to avoid the appearance of pressure on the pendulum rod.
- **Maintenance:** the ballistic pendulum principally requires no maintenance. If necessary some non-acidic grease (Vaseline) can be applied to the bearing screw ④ and the knurled screw ⑫. Other than in the vicinity of the scale, the apparatus may be cleaned using acetone, ethanol (white spirit) or petroleum ether as required. Avoid submerging the equipment in water.

4. Experiment procedure and evaluation

4.1 Ballistic pendulum

4.1.1 Experiment setup

- The experiment setup corresponds to Fig. 1 for experiments on inelastic collision. For experiments on elastic collisions, the pendulum should be turned round by 180° (cf. Section 3 “Operation”).

4.1.2 Experiment procedure

- It is practical for these experiments to enter the experiment number, the spring tension (1, 2 or 3), the type of collision (inelastic “*i*” or elastic “*e*”), the number of extra weights used and the measured angle φ . In order to obtain the most accurate experiment results, after one shot, a second should be performed with the swing pointer not having been reset to 0° in between. This minimizes the unavoidable frictional losses of the swing pointer.
- Example experiment sequence:

| No | Spring tension | Type of collision | Extra weights | Angle φ |
|----|----------------|-------------------|---------------|-----------------|
| 1 | 1 | <i>i</i> | 0 | 17.5 |
| 2 | 2 | <i>i</i> | 0 | 25.0 |
| 3 | 3 | <i>i</i> | 0 | 36.0 |
| 4 | 1 | <i>i</i> | 2 | 9.5 |
| 5 | 2 | <i>i</i> | 2 | 13.5 |
| 6 | 3 | <i>i</i> | 2 | 19.0 |
| 7 | 1 | <i>e</i> | 0 | 29.5 |
| 8 | 2 | <i>e</i> | 0 | 42.0 |
| 9 | 3 | <i>e</i> | 0 | 60.0 |

4.1.3 Experiment evaluation

4.1.3.1 Inelastic collision

- The following equation is valid for the swinging pendulum due to conservation of energy

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{kin}} \quad (1)$$

where the potential energy is

$$E_{\text{pot}} = m_{\text{tot}} g \Delta h \quad (2)$$

Here is m_{tot} the total mass of the pendulum including the projectile and any extra weights, g is the acceleration due to gravity and Δh is the difference in height of the center of gravity of the pendulum at rest and at the maximum extent of its swing.

- From the measured angle φ and the measured length l_s to the center of gravity according to Fig.2 the following is derived:

$$\Delta h = l_s (1 - \cos \varphi) \quad (3)$$

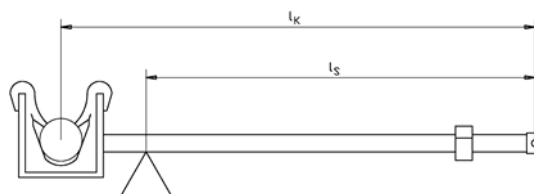


Fig. 2: Determining the required lengths. Distance between center of gravity and axis of rotation (l_s) should be measured including the projectile and any additional weights when the collision is inelastic. To perform the measurement, the pendulum may, for example, be balanced on a ruler mounted on its side. The distance between the center of the projectile and the axis of rotation is $l_k = 280$ mm.

- The kinetic energy can be calculated from the moment of inertia I_{tot} relative to the axis of rotation and the maximum angular speed ω according to the equation

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} I_{\text{tot}} \omega^2 \quad (4)$$

- If Equations 2 and 4 are inserted into Equation 1 and Δh eliminated using Equation 3 then the equation can be rearranged to:

$$\omega = \sqrt{\frac{2 m_{\text{tot}} g l_s (1 - \cos \varphi)}{I_{\text{tot}}}} \quad (5)$$

- However, we are not seeking ω , but the initial velocity of the projectile v_0 . The relationship between the two values is given by the equation for the conservation of angular momentum directly before and after the collision:

$$L_k = L_{\text{tot}} \quad (6)$$

with the angular momentum of the projectile

$$L_k = m_k I_k v_0 \quad (7)$$

before the collision and the total angular momentum

$$L_{\text{tot}} = I_{\text{tot}} \omega \quad (8)$$

after the collision. Inserting Eqs. 7 and 8 into Eq. 6 gives:

$$m_k I_k v_0 = I_{\text{tot}} \omega \quad (9)$$

- Resolving this for ω and equating with Eq. 5 leads to the following relationship

$$v_0 = \frac{1}{m_k I_k} \sqrt{2 I_{\text{tot}} m_{\text{tot}} g l_s (1 - \cos \varphi)} \quad (10)$$

- The moment of inertia is in principle determined from the integral

$$I_{\text{tot}} = \int_m l^2 dm \quad (11)$$

where l is the distance of each mass element from the axis of rotation. Since in this case it is not the moment of inertia that we seek to derive I_{tot} can also be calculated from the period T of the pendulum (with projectile and any extra weights). For a physical pendulum the following is valid for small deflections¹:

$$I_{\text{tot}} = m_{\text{tot}} g l_s \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \quad (12)$$

- This means that all the variables are now known or calculable. For the above example, the following table emerges:

| No | m_k / kg | m_{tot} / kg | l_s / m | T / s | v_0 in m/s |
|----|------------|-----------------------|-----------|---------|--------------|
| 1 | 0.00695 | 0.06295 | 0.218 | 1.01 | 3.39 |
| 2 | 0.00695 | 0.06295 | 0.218 | 1.01 | 4.82 |
| 3 | 0.00695 | 0.06295 | 0.218 | 1.01 | 6.88 |
| 4 | 0.00695 | 0.09795 | 0.252 | 1.07 | 3.51 |
| 5 | 0.00695 | 0.09795 | 0.252 | 1.07 | 4.98 |
| 6 | 0.00695 | 0.09795 | 0.252 | 1.07 | 6.99 |

- The numeric values should be determined separately for every pendulum, since material and manufacturing tolerances mean that values may differ from one to another.

4.1.3.2 Elastic collision

- For a swinging pendulum Eq. 5 is still valid for the motion after a collision, the only difference being that the moment of inertia I_p is determined without the projectile but with any extra weights (pendulum mass m_p):

$$\omega = \sqrt{\frac{2 m_p g l_s (1 - \cos \varphi)}{I_p}} \quad (13)$$

- To determine the relationship between ω and the initial velocity v_0 both the conservation of angular momentum and the conservation of energy before and after the collision must now be used. The additional equation is required since the system has an additional degree of freedom in the projectile velocity v_2 after the collision. As for Eq. 9, the following is true for the angular momentum:

$$m_k I_k v_0 = m_k I_k v_2 + I_p \omega$$

\Leftrightarrow

$$v_2 = v_0 - \frac{I_p \omega}{m_k I_k} \quad (14)$$

- If this velocity v_2 is inserted into the equation for the conservation of energy

$$\frac{1}{2} m_k v_0^2 = \frac{1}{2} m_k v_2^2 + \frac{1}{2} I_p \omega^2 \quad (15)$$

by rearranging in various steps the following expression is obtained for v_0

$$v_0 = \frac{1}{2} \omega I_k \left(1 + \frac{I_p}{m_k I_k^2} \right) s \quad (16)$$

- If Eq. 13 is plugged in here and I_p determined as in Eq. 12, then v_0 can be calculated for an ideal inelastic collision:

| No | m_k / kg | m_p / kg | l_s / m | T / s | v_0 in m/s |
|----|------------|------------|-----------|---------|--------------|
| 7 | 0.00695 | 0.0560 | 0.211 | 1.008 | 2.88 |
| 8 | 0.00695 | 0.0560 | 0.211 | 1.008 | 4.05 |
| 9 | 0.00695 | 0.0560 | 0.211 | 1.008 | 5.65 |

- These values for v_0 are about 18% smaller than those obtained for inelastic collisions. This can be explained by the fact that the elastic collisions are not entirely ideal.

¹ Recknagel, A.: Physik Mechanik, 3te Auflage, VEB Verlag Technik Berlin, 1958.

4.2 Determination of trajectories

4.2.1 Experiment setup

- One possible experiment setup is shown schematically in Fig. 3 (not to scale). The drill holes in the back plate of the pendulum are placed so that when a projectile is fired to land directly on the workbench, the launch heights are 50, 100, 150, 200 and 300 mm.

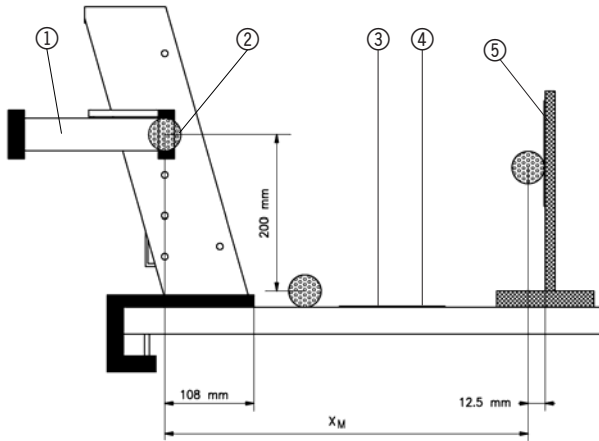


Fig. 3: Experiment setup, key: ① Projectile launcher, ② Launch position of projectile, ③ Paper, ④ Carbon paper, ⑤ Easel with whiteboard (for example)

- When launching against a vertical wall (e.g. whiteboard U10030 mounted on easel U10381) the radius of the projectile (1.25 cm) should be subtracted from the distance between the point of launch and the wall to obtain the distance measurement x_M . The height measurement y_M relative to the launch height is given by the height of the impact on the wall minus 62.5 mm, 112.5 mm, 162.5 mm, 212.5 mm or 312.5 depending on the hole used.

4.2.2 Experiment procedure

- It is practical for these experiments to note the experiment number, the spring tension (1, 2 or 3), the launch angle and the values x_M and y_M . Example:

| No | Spring tension | Launch-angle $\varphi / ^\circ$ | Projectile distance x_M / cm | Target height y_M / cm |
|----|----------------|---------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------|
| 1 | 1 | 0 | 171.3 | -30 |
| 2 | 2 | 0 | 125.4 | -30 |
| 3 | 3 | 0 | 86.9 | -30 |
| 4 | 1 | 0 | 62.3 | -15 |
| 5 | 2 | 0 | 90.5 | -15 |
| 6 | 3 | 0 | 120.7 | -15 |

4.1.3 Experiment evaluation

- It is practical to take as the origin of the coordinate system the mid-point of the projectile at the moment of launch. Then the following applies:

$$v_x = v_0 \cos \varphi \quad (17)$$

$$v_y = v_0 \sin \varphi \quad (18)$$

$$y = v_y t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (19)$$

$$x = v_x t \quad (20)$$

From Eq. 20 $t = x / v_x$, whereby the time can be eliminated from Eq. 19.

- If v_x and v_y are then eliminated from the resulting equation using Eqs. 17 and 18, the following is obtained

$$y = x \tan \varphi - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} \quad (21).$$

This is the equation for the trajectory.

- In this equation only the launch velocity v_0 is unknown since the distances x and y were measured during the course of the experiments. If v_0 is calculated for the various experiments, the following results are obtained:

| Spring tension | v_0 in m/s |
|----------------|--------------|
| 1 | 3.53 |
| 2 | 5.10 |
| 3 | 6.85 |

- The numbers are based on a total of 25 experiments, of which only 6 are explicitly listed in the above table. The trajectory can now be obtained from these using Eq. 21 and compared to the measured values. The result is shown in Fig. 4.

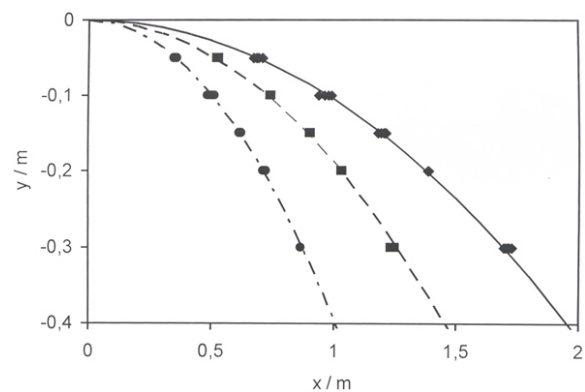
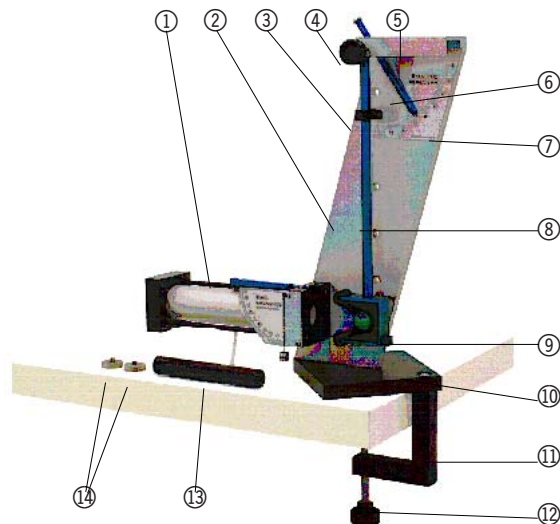


Fig. 4: Comparison of measurements and calculated curve, x = horizontal projectile distance, y = vertical height, symbols = measured values (circles = spring tension 1, squares = spring tension 2, rhombuses = spring tension 3), lines = calculated trajectories

U10362 Pendule balistique

Instructions d'utilisation

9/04 MH



- ① Ejecteur (U10360)
- ② Plaque porteuse
- ③ Taquet pour aiguille entraînée
- ④ Vis de palier
- ⑤ Butée
- ⑥ Aiguille entraînée
- ⑦ Graduation angulaire
- ⑧ Pendule
- ⑨ Récepteur de boule
- ⑩ Plaque de base
- ⑪ Bride de fixation de table
- ⑫ Vis moletée
- ⑬ Bourroir (pour U10360)
- ⑭ Poids additionnels (2 pièces)

Fig. 1: Composants

1. Consignes de sécurité

- Ce manuel d'utilisation décrit essentiellement le pendule balistique. On tiendra également compte du manuel de l'éjecteur U10360.
- Pour vérifier si une boule se trouve dans l'éjecteur et que le ressort est tendu, se servir uniquement des trous d'observation latéraux. Il est interdit de regarder dans la bouche par l'avant. Risque de blessure !
- Ne jamais viser sur des gens !
- Pendant les expériences, porter des lunettes de protection.
- Avant de ranger l'éjecteur, détendre toujours le ressort et retirer les billes de la rampe.

2. Description

- Le pendule balistique permet de déterminer par l'expérience la vitesse d'éjection de la boule lorsqu'elle sort de l'éjecteur. Par ailleurs, il permet également de déterminer les paraboles de l'éjection horizontale ou inclinée, des hauteurs d'éjection de 5, 10, 15, 20 et 30 cm pouvant être ajustées aisément à l'aide d'alésages prédéfinis.
- Grâce à l'extrême légèreté du pendule, les expériences peuvent être réalisées avec des boules en

plastique relativement inoffensives, à la place de boules en acier. On peut évaluer les expériences tant sur le jet plastique (quantitatif) qu'élastique (qualitatif). Les vitesses déduites des expériences coïncident à $\pm 3\%$ avec les résultats obtenus habituellement.

- En utilisant des poids additionnels, on peut étudier différentes déviations du pendule à vitesse de boule constante.

3. Operation and maintenance

- Tout d'abord, visser le pendule balistique à une plaque de travail stable à l'aide de la bride de fixation. Puis, introduire l'éjecteur soit horizontalement devant le pendule (cf. Fig. 1), soit par derrière dans la plaque porteuse ② (cf. Fig. 3).

Conseil : si la plaque de travail n'est pas assez stable, il arrive que le retour du pendule, après la déviation maximale de ce dernier, entraîne un à-coup dû à l'impact contre l'éjecteur, dérégulant ainsi l'aiguille entraînée. Dans ce cas, rattraper le pendule avec la main.

- Avant de charger une boule dans l'éjecteur, vérifier toujours que le ressort est détendu. Puis, placer une boule dans la partie avant du cylindre in-

térieure en plastique. Pousser la boule avec le bourroir dans la rampe, jusqu'à ce que la tension désirée du ressort soit obtenue. Ne pas retirer le bourroir trop rapidement, l'aspiration qui en résulterait risquerait sinon d'entraîner la boule. Contrôler la position de la boule uniquement à travers les trous latéraux. Ne jamais regarder dans la rampe !

- Avant l'éjection, vérifier que personne ne se trouve sur la trajectoire de la boule. Puis, tirer brièvement sur le cordon du levier de détente, en veillant à tirer à peu près perpendiculairement au levier.
- On peut démonter le pendule ⑧ en desserrant la vis de palier ④ et l'assembler de nouveau tourné à 180°, avec la face arrière du récepteur de boule ⑨ orienté vers l'éjecteur (expériences sur le jet élastique). La butée ⑤ est conçue de telle sorte qu'il suffit de ne serrer que très légèrement la vis de palier pour incliner un peu le pendule, le récepteur de boule ne se trouve alors plus exactement devant la bouche de l'éjecteur. Aussi faut-il serrer la vis de palier, jusqu'à ce que le récepteur de boule soit aligné à la bouche.
- Après avoir tourné le pendule ou si cela s'avère nécessaire, ajuster le taquet ③ de l'aiguille entraînée ⑥ de telle sorte qu'il vient juste toucher l'aiguille lorsque le pendule est stable. Ne tourner la vis du taquet qu'avec les doigts pour éviter des pressions dans la barre du pendule.
- **Entretien** : fondamentalement, le pendule balistique ne nécessite aucun entretien. Le cas échéant, verser un peu de graisse sans acide (vaseline) sur la vis de palier ④ et la vis moletée ⑩. Le cas échéant, il peut être nettoyé avec de l'acétone, de l'éthanol ou de la ligroïne (sauf dans le domaine de la graduation). Éviter de le plonger dans de l'eau.

4. Réalisation et évaluation des expériences

4.1 Pendule balistique

4.1.1 Montage de l'expérience

- Le montage de l'expérience correspond à la figure 1 des expériences sur le jet élastique. Pour réaliser des expériences sur le jet élastique, tourner le pendule à 180° (cf. paragraphe 3 « Manipulation »).

4.1.2 Réalisation de l'expérience

- Au cours des expériences, il est conseillé de noter le numéro de l'expérience, la tension du ressort (1, 2 ou 3), le type de jet (plastique « *p* » ou élastique « *e* »), le nombre de poids additionnels utilisés ainsi que la mesure angulaire φ . Pour obtenir des résultats aussi précis que possible, répéter le lancement, l'aiguille entraînée ne devant pas être remis à 0°. On minimise ainsi les pertes inévitables dues au frottement de l'aiguille.
- Exemple d'une série d'expériences :

| N°. | Tension de ressort | Type de jet | Poids additionnels | Angle φ |
|-----|--------------------|-------------|--------------------|-----------------|
| 1 | 1 | <i>p</i> | 0 | 17,5 |
| 2 | 2 | <i>p</i> | 0 | 25,0 |
| 3 | 3 | <i>p</i> | 0 | 36,0 |
| 4 | 1 | <i>p</i> | 2 | 9,5 |
| 5 | 2 | <i>p</i> | 2 | 13,5 |
| 6 | 3 | <i>p</i> | 2 | 19,0 |
| 7 | 1 | <i>e</i> | 0 | 29,5 |
| 8 | 2 | <i>e</i> | 0 | 42,0 |
| 9 | 3 | <i>e</i> | 0 | 60,0 |

4.1.3 Évaluation de l'expérience

4.1.3.1 Jet plastique

- Pour le pendule oscillant, le principe sur la conservation de l'énergie se présente sous la forme

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{cin}} \quad (1)$$

l'équation

$$E_{\text{pot}} = m_{\text{tot}} g \Delta h \quad (2)$$

s'appliquant à l'énergie potentielle. Dans cet exemple, m_{tot} représente la masse totale du pendule avec la boule et les éventuels poids additionnels, g l'accélération de la pesanteur et Δh la différence de hauteur du centre de gravité du pendule entre la position au repos et la déviation maximale.

- Avec l'angle φ mesuré et le centre de gravité mesuré l_s selon la figure 2, on obtient :

$$\Delta h = l_s (1 - \cos \varphi) \quad (3)$$

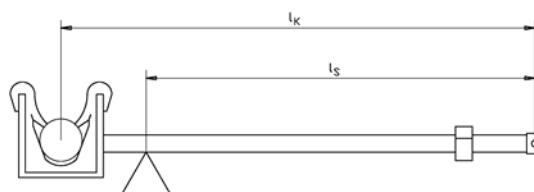


Fig. 2: Grandeurs nécessaires à l'évaluation. L'écart entre le centre de gravité et le point d'appui (l_s) doit être mesuré lors du jet plastique avec la boule et les poids additionnels. Le pendule peut être contrebalancé par exemple sur une règle placée de chant. L'écart entre le centre de la boule et le point d'appui s'élève à $l_k = 280$ mm.

- L'énergie cinétique est calculée avec le couple d'inertie I_{tot} par rapport au point d'appui du pendule et la vitesse angulaire maximale ω d'après

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} I_{\text{tot}} \omega^2 \quad (4)$$

- Si les équations 2 et 4 sont utilisées dans l'équation 1 et que Δh est éliminé par l'équation 3, on obtient :

$$\omega = \sqrt{\frac{2 m_{\text{tot}} g l_s (1 - \cos \varphi)}{I_{\text{tot}}}} \quad (5)$$

- Or, on ne recherche pas ω , mais la vitesse initiale de la boule v_0 . Le rapport entre les deux grandeurs résulte du principe de conservation du moment angulaire (moment cinétique) directement avant et après le jet :

$$L_k = L_{\text{tot}} \quad (6)$$

avec le moment cinétique de la boule

$$L_k = m_k I_k v_0 \quad (7)$$

avant le jet et le moment cinétique total

$$L_{\text{tot}} = I_{\text{tot}} \omega \quad (8)$$

après le jet. En utilisant les équations 7 et 8 dans l'équation 6, on obtient

$$m_k I_k v_0 = I_{\text{tot}} \omega \quad (9)$$

- Après la résolution de ω et l'égalisation avec l'équation 5, on obtient le rapport recherché

$$v_0 = \frac{1}{m_k I_k} \sqrt{2 I_{\text{tot}} m_{\text{tot}} g l_s (1 - \cos \varphi)} \quad (10)$$

- Fondamentalement, le moment d'inertie doit être déterminé avec équation

$$I_{\text{tot}} = \int_m I^2 dm \quad (11)$$

l étant l'écart entre un élément de masse dm et le point d'appui. Comme il ne s'agit pas ici de déterminer des moments d'inertie, I_{tot} peut être calculé à partir de la durée d'oscillation T du pendule (avec la boule et d'éventuels poids additionnels). Pour un pendule physique et de petites déviations¹, on a :

$$I_{\text{tot}} = m_{\text{tot}} g l_s \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \quad (12)$$

- A présent, toutes les grandeurs sont connues ou peuvent être calculées. Pour l'exemple ci-dessus, on obtient :

| N°. | m_k / kg | m_{tot} / kg | I_s / m | T / s | v_0 en m/s |
|-----|------------|-----------------------|-----------|---------|--------------|
| 1 | 0,00695 | 0,06295 | 0,218 | 1,01 | 3,39 |
| 2 | 0,00695 | 0,06295 | 0,218 | 1,01 | 4,82 |
| 3 | 0,00695 | 0,06295 | 0,218 | 1,01 | 6,88 |
| 4 | 0,00695 | 0,09795 | 0,252 | 1,07 | 3,51 |
| 5 | 0,00695 | 0,09795 | 0,252 | 1,07 | 4,98 |
| 6 | 0,00695 | 0,09795 | 0,252 | 1,07 | 6,99 |

- Les valeurs doivent être déterminées individuellement pour chaque pendule, car les tolérances de matière et de fabrication peuvent entraîner des écarts.

4.1.3.2 Jet élastique

- L'équation 5 s'applique toujours au pendule oscillant après le jet, à la différence près qu'il faut tenir compte du moment d'inertie du pendule sans la boule I_p , mais éventuellement avec des poids additionnels (masse de pendule m_p) :

$$\omega = \sqrt{\frac{2 m_p g l_s (1 - \cos \varphi)}{I_p}} \quad (13)$$

- Pour déterminer le rapport entre ω et la vitesse initiale v_0 , nous disposons maintenant tant du taux de conservation du moment cinétique que du taux de conservation de l'énergie, à chaque fois avant et après le jet. La suite de l'équation est également utile, car le système présente un autre degré de liberté : la vitesse de la boule v_2 après le jet. Par analogie à l'équation 9, on obtient pour les moments angulaires :

$$m_k I_k v_0 = m_k I_k v_2 + I_p \omega$$

\Leftrightarrow

$$v_2 = v_0 - \frac{I_p \omega}{m_k I_k} \quad (14)$$

- Si cette vitesse v_2 est utilisée dans le principe de conservation de l'énergie

$$\frac{1}{2} m_k v_0^2 = \frac{1}{2} m_k v_2^2 + \frac{1}{2} I_p \omega^2 \quad (15)$$

on obtient après quelques transformations v_0 :

$$v_0 = \frac{1}{2} \omega I_k \left(1 + \frac{I_p}{m_k I_k^2} \right) \quad (16)$$

- Si l'on utilise en plus l'équation 13 et qu'on détermine I_p par analogie à l'équation 12, v_0 peut être calculé pour un jet entièrement élastique :

| N°. | m_k / kg | m_p / kg | I_s / m | T / s | v_0 en m/s |
|-----|------------|------------|-----------|---------|--------------|
| 7 | 0,00695 | 0,0560 | 0,211 | 1,008 | 2,88 |
| 8 | 0,00695 | 0,0560 | 0,211 | 1,008 | 4,05 |
| 9 | 0,00695 | 0,0560 | 0,211 | 1,008 | 5,65 |

- Ces valeurs pour v_0 sont env. 18% inférieures à celles qui sont déterminées par le jet plastique, ce qui permet de conclure que le jet n'a pas été entièrement élastique.

¹ Recknagel, A.: Physik Mechanik, 3te Auflage, VEB Verlag Technik Berlin, 1958.

4.2 Détermination de paraboles d'éjection

4.2.1 Montage de l'expérience

- Un montage possible de l'expérience est représenté schématiquement dans la figure 3 (l'échelle n'est pas tout à fait exacte). Les trous dans la plaque porteuse du pendule sont disposés de telle sorte qu'un jet directement sur la plaque de travail donne les hauteurs d'éjection 50, 100, 150, 200 et 300 mm.

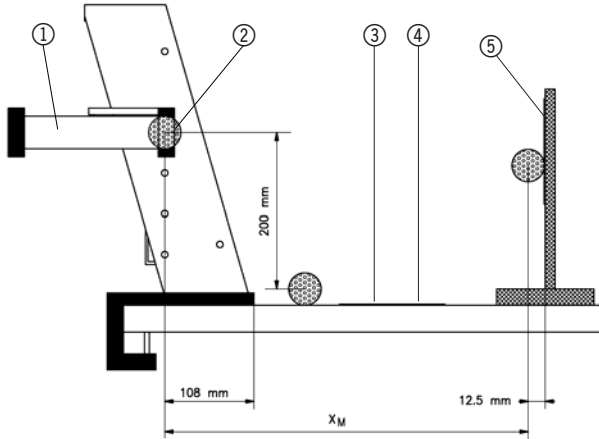


Fig. 3 : Montage de l'expérience, légende : ① éjecteur, ② position de lancement de la boule, ③ papier, ④ papier carbone, ⑤ par ex. tableau blanc avec support

- En cas d'éjection contre un mur vertical (par ex. un tableau blanc U10030 monté sur le support U10381), déduire le rayon de la boule (1,25 cm) de l'écart horizontal entre le point d'éjection et le mur, pour obtenir la distance x_M . La hauteur y_M par rapport à la hauteur de lancement résulte de l'écart entre le point d'impact au mur et la plaque de la table, moins 62,5 mm, 112,5 mm, 162,5 mm, 212,5 mm ou 312,5 mm, selon le trou utilisé.

4.2.2 Réalisation de l'expérience

- Lors des expériences, il est conseillé de noter le numéro de l'expérience, la tension du ressort (1, 2 ou 3), l'angle d'éjection ainsi que les valeurs x_M et y_M . Exemple :

| N°. | Tension de ressort | Angle - d'éjection $\varphi / ^\circ$ | Portée x_M / cm | Hauteur cible y_M / cm |
|-----|--------------------|---------------------------------------|--------------------------|---------------------------------|
| 1 | 1 | 0 | 171,3 | -30 |
| 2 | 2 | 0 | 125,4 | -30 |
| 3 | 3 | 0 | 86,9 | -30 |
| 4 | 1 | 0 | 62,3 | -15 |
| 5 | 2 | 0 | 90,5 | -15 |
| 6 | 3 | 0 | 120,7 | -15 |

4.1.3 Evaluation de l'expérience

- Pour des raisons pratiques, la source des coordonnées est placée au centre de la boule au moment de l'éjection. On a alors les équations suivantes :

$$v_x = v_0 \cos \varphi \quad (17)$$

$$v_y = v_0 \sin \varphi \quad (18)$$

$$y = v_y t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (19)$$

$$x = v_x t \quad (20)$$

De l'équation 20, il résulte directement $t = x / v_x$, le temps dans l'équation 19 pouvant être éliminé.

- Si l'on élimine encore dans l'équation ainsi obtenue les grandeurs v_x et v_y en utilisant les équations 17 et 18, on obtient avec

$$y = x \tan \varphi - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} \quad (21).$$

l'équation de la parabole d'éjection.

- Dans cette équation, seule est encore inconnue la vitesse initiale v_0 , car les parcours x et y ont été mesurés au cours des expériences. Si l'on détermine v_0 pour les différentes expériences, on obtient :

| Tension de ressort | v_0 en m/s |
|--------------------|--------------|
| 1 | 3,53 |
| 2 | 5,10 |
| 3 | 6,85 |

- Ces valeurs reposent sur un total de 25 expériences, dont six seulement sont indiquées dans le tableau ci-dessus. Ces valeurs permettent maintenant de calculer des paraboles d'éjection d'après l'équation 21 et de les comparer aux valeurs mesurées. Le résultat est illustré dans la figure 4.

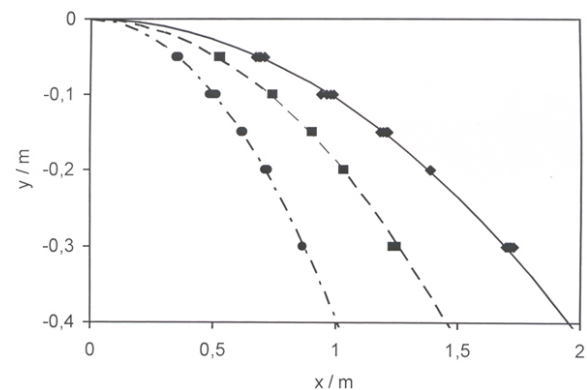
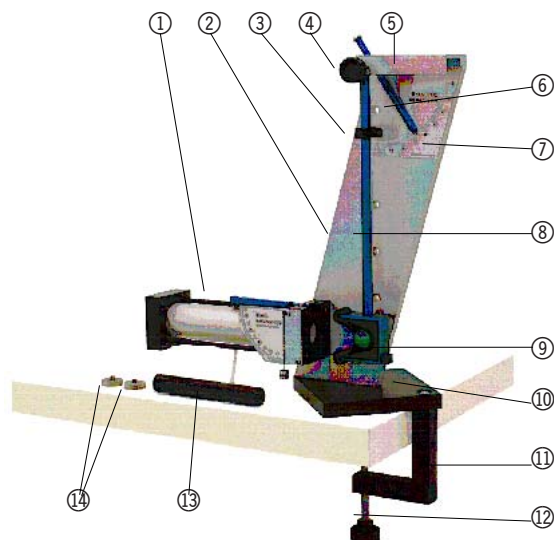


Fig. 4 : Valeurs mesurées et calcul comparatif, x = portée, y = hauteur, symboles = valeurs mesurées (cercles = tension de ressort 1, carrés = tension de ressort 2, losanges = tension de ressort 3), lignes = paraboles calculées

U10362 Pendolo balistico

Istruzioni per l'uso

9/04 MH



- ① Apparecchio di lancio (U10360)
- ② Piastra di supporto
- ③ Trascinatore per la lancetta
- ④ Vite di supporto
- ⑤ Controsupporto
- ⑥ Lancetta
- ⑦ Scala angolare
- ⑧ Pendolo
- ⑨ Fermasfera
- ⑩ Piastra di base
- ⑪ Morsetto da tavolo
- ⑫ Vite a testa zigrinata
- ⑬ Piano di carico (con U10360)
- ⑭ Pesi supplementari, 2 pezzi

Fig. 1: componenti

1. Norme di sicurezza

- Nelle presenti istruzioni per l'uso si prende in considerazione essenzialmente il pendolo balistico, tuttavia devono essere osservate anche le istruzioni per l'uso dell'apparecchio di lancio U10360.
- Per verificare se nell'apparecchio di lancio è presente una sfera e se la molla è sotto tensione, devono essere utilizzati esclusivamente i fori di osservazione laterali. È vietato guardare dal davanti nella bocca. Pericolo di lesioni!
- Non puntare mai l'apparecchio verso le persone!
- Durante gli esperimenti indossare occhiali protettivi.
- Riporre sempre l'apparecchio di lancio con la molla priva di tensione e senza sfera nella canna.

2. Descrizione

- Il pendolo balistico serve per la determinazione sperimentale della velocità iniziale della sfera in uscita dall'apparecchio di lancio. Inoltre è possibile determinare parabole di lancio in caso di lancio orizzontale o inclinato, dove le altezze di lancio pari a 5, 10, 15, 20 e 30 cm possono essere impostate in modo semplice mediante fori prestabiliti.

- Grazie al pendolo estremamente leggero è possibile eseguire gli esperimenti, anziché con sfere di acciaio, con sfere di plastica che al confronto non sono pericolose. Possono essere analizzati sia esperimenti relativi all'urto plastico (quantitativo) che all'urto elastico (qualitativo). Le velocità delle sfere determinate con gli esperimenti di lancio e di oscillazione corrispondono normalmente a circa il 3%.
- Mediante pesi supplementari è possibile esaminare deviazioni di oscillazione diverse ad una velocità delle sfere costante.

3. Uso e manutenzione

- Inizialmente il pendolo balistico viene avvitato con il morsetto da tavolo su un piano di lavoro stabile. Successivamente l'apparecchio di lancio viene avvitato orizzontalmente davanti al pendolo, come mostrato in fig. 1, oppure da dietro, come si vede in fig. 3, alla piastra di supporto ②.
- Consiglio:** se il piano di lavoro non è sufficientemente stabile, può verificarsi che dopo la deviazione massima del pendolo, in caso di oscillazione all'indietro dello stesso, si produca uno scossone

dovuto al contatto contro l'apparecchio di lancio, determinando lo spostamento della lancetta. In tal caso il pendolo dovrebbe essere fermato a mano.

- Il caricamento dell'apparecchio di lancio con una sfera avviene sempre a molla priva di tensione, collocando una singola sfera nella parte anteriore del cilindro interno di plastica. Quindi la sfera viene spinta nella canna con il piano di carico fino al raggiungimento del tensionamento desiderato della molla. È consigliato non estrarre troppo rapidamente il piano di carico, poiché altrimenti il risucchio che si forma potrebbe trascinare con sé la sfera. Un controllo della posizione della sfera può essere eseguito solamente mediante i fori di osservazione laterali. Non guardare mai nella canna!
- Prima del lancio accertarsi che non si trovino persone nella traiettoria. Per il lancio tirare brevemente la corda della leva di scatto, in tal modo il tiro dovrebbe risultare leggermente verticale rispetto alla leva.
- Il pendolo ⑧ può essere smontato svitando la vite di supporto ④ e può essere rimontato avvitandola di 180° con il lato posteriore del fermasfera ⑨ rivolto verso l'apparecchio di lancio (esperimenti relativi all'urto elastico). Il controsupporto ⑤ è costruito in modo tale che il pendolo sia agganciato in modo leggermente inclinato con una vite di supporto serrata solo di pochissimo, per cui il fermasfera non si trova esattamente davanti alla bocca dell'apparecchio di lancio. Pertanto serrare la vite di supporto fino ad allineamento del fermasfera e della bocca.
- Dopo avere ruotato il pendolo o se si rende necessario, impostare il trascinatore ③ per la lancetta ⑥ in modo che tocchi esattamente la lancetta, quando il pendolo pende immobile. La vite del trascinatore dovrebbe essere serrata solamente con le dita, per evitare punti di pressione nell'asta del pendolo.
- **Manutenzione:** il pendolo balistico in linea di principio non richiede manutenzione. Se necessario, può essere applicata una piccola quantità di grasso non acido (vaselina) sulla vite di supporto ④ e sulla vite a testa zigrinata ⑫. Fatta eccezione per la zona della scala, può essere pulito, se necessario, con acetone, etanolo (alcool) o benzina solvente. Evitare di immergere l'apparecchio in acqua.

4. Esecuzione dell'esperimento e analisi

4.1 Pendolo balistico

4.1.1 Struttura dell'esperimento

- La struttura dell'esperimento corrisponde alla fig. 1 per gli esperimenti relativi all'urto plastico. Per gli esperimenti relativi all'urto elastico il pendolo deve essere ruotato di 180° (cfr. paragrafo 3 "Uso").

4.1.2 Esecuzione dell'esperimento

- È opportuno annotare durante gli esperimenti il numero dell'esperimento, il tensionamento del-

la molla (1, 2 o 3), il tipo di urto (plastico "p" o elastico "e"), il numero dei pesi supplementari utilizzati così come il valore misurato dell'angolo φ . Per ottenere risultati dell'esperimento estremamente precisi, dopo il primo urto dovrebbe esserne prodotto un altro, senza che la lancetta venga riportata su 0°. In questo modo le inevitabili perdite per attrito della lancetta vengono ridotte ai minimi termini.

- Esempio di una serie di esperimenti:

| N. | Tensionamento molla | Tipo di urto | Pesi supplementari | Angolo φ |
|----|---------------------|--------------|--------------------|------------------|
| 1 | 1 | p | 0 | 17,5 |
| 2 | 2 | p | 0 | 25,0 |
| 3 | 3 | p | 0 | 36,0 |
| 4 | 1 | p | 2 | 9,5 |
| 5 | 2 | p | 2 | 13,5 |
| 6 | 3 | p | 2 | 19,0 |
| 7 | 1 | e | 0 | 29,5 |
| 8 | 2 | e | 0 | 42,0 |
| 9 | 3 | e | 0 | 60,0 |

4.1.3 Analisi dell'esperimento

4.1.3.1 Urto plastico

- Per il pendolo oscillante vale la legge sulla conservazione dell'energia nella formula

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{cin}} \quad (1)$$

dove per l'energia potenziale vale

$$E_{\text{pot}} = m_{\text{tot}} g \Delta h \quad (2)$$

Qui m_{tot} rappresenta il peso complessivo del pendolo incl. la sfera ed eventualmente i pesi supplementari, g è l'accelerazione terrestre e Δh la differenza di altezza del baricentro del pendolo tra la posizione di riposo e la deviazione max.

- Dall'angolo φ e dalla lunghezza del baricentro l_s misurati, come da fig. 2, si ottiene:

$$\Delta h = l_s (1 - \cos \varphi) \quad (3)$$

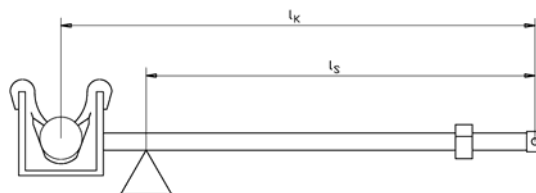


Fig. 2: Lunghezze necessarie per l'analisi. La distanza "baricentro - punto di rotazione" (l_s) deve essere misurata, nel caso dell'urto plastico, includendo la sfera e i contrappesi. Per la misurazione il pendolo può essere allineato ad esempio su una riga messa di taglio. La distanza "centro della sfera - punto di rotazione" è pari a $l_k = 280$ mm.

- L'energia cinetica si calcola mediante il momento d'inerzia I_{tot} riferito al punto di rotazione del pendolo e la velocità angolare max. ω in base a

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} I_{\text{tot}} \omega^2 \quad (4)$$

- Se le equazioni 2 e 4 vengono inserite nell'equazione 1 e il valore Δh viene eliminato mediante l'equazione 3, dalla conversione ne consegue:

$$\omega = \sqrt{\frac{2 m_{\text{tot}} g l_s (1 - \cos \varphi)}{I_{\text{tot}}}} \quad (5)$$

- Non viene cercato ω , ma la velocità iniziale della sfera v_0 . La correlazione tra le due grandezze si ottiene dalla legge della conservazione del momento angolare (conservazione del moto rotatorio) subito prima e subito dopo l'urto:

$$L_k = L_{\text{tot}} \quad (6)$$

con il "moto rotatorio" della sfera

$$L_k = m_k I_k v_0 \quad (7)$$

prima dell'urto e del moto rotatorio complessivo

$$L_{\text{tot}} = I_{\text{tot}} \omega \quad (8)$$

dopo l'urto. Inserendo le equazioni 7 e 8 nell'equazione 6 si ottiene

$$m_k I_k v_0 = I_{\text{tot}} \omega \quad (9)$$

- Ciò, dopo la risoluzione di ω e l'equiparazione dell'equazione 5, determina la correlazione cercata

$$v_0 = \frac{1}{m_k I_k} \sqrt{2 I_{\text{tot}} m_{\text{tot}} g l_s (1 - \cos \varphi)} \quad (10)$$

- Il momento d'inerzia viene in linea di principio calcolato in base a

$$I_{\text{tot}} = \int_m l^2 dm \quad (11)$$

dove l è la relativa distanza di un peso dm dal punto di rotazione. Poiché la determinazione dei momenti d'inerzia non è lo scopo delle presenti considerazioni, I_{tot} può anche essere calcolato dal periodo di oscillazione T del pendolo (con sfera ed eventualmente contrappesi). Per un pendolo fisico vale, in caso di deviazioni ridotte¹:

$$I_{\text{tot}} = m_{\text{tot}} g l_s \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \quad (12)$$

- In tal modo ora sono note o calcolabili tutte le grandezze. Per l'esempio summenzionato si ottiene:

| N. | m_k / kg | $m_{\text{tot}} / \text{kg}$ | l_s / m | T / s | v_0 in m/s |
|----|-------------------|------------------------------|------------------|----------------|--------------|
| 1 | 0,00695 | 0,06295 | 0,218 | 1,01 | 3,39 |
| 2 | 0,00695 | 0,06295 | 0,218 | 1,01 | 4,82 |
| 3 | 0,00695 | 0,06295 | 0,218 | 1,01 | 6,88 |
| 4 | 0,00695 | 0,09795 | 0,252 | 1,07 | 3,51 |
| 5 | 0,00695 | 0,09795 | 0,252 | 1,07 | 4,98 |
| 6 | 0,00695 | 0,09795 | 0,252 | 1,07 | 6,99 |

- I valori numerici dovrebbero essere determinati singolarmente per ogni pendolo, poiché le tolleranze intrinseche al materiale e alla produzione possono determinare deviazioni.

4.1.3.2 Urto elastico

- Per il pendolo oscillante dopo l'urto vale inoltre l'equazione 5 con la differenza che in questo caso il momento d'inerzia del pendolo deve essere preso in considerazione senza la sfera I_p ma, se necessario, con pesi supplementari (peso del pendolo m_p):

$$\omega = \sqrt{\frac{2 m_p g l_s (1 - \cos \varphi)}{I_p}} \quad (13)$$

- Per la determinazione della correlazione tra ω e la velocità iniziale v_0 sono ora disponibili sia la legge della conservazione del momento angolare che la legge sulla conservazione dell'energia, di volta in volta determinate prima e dopo l'urto. È necessaria anche l'ulteriore equazione, poiché il sistema ha un ulteriore grado di libertà: la velocità della sfera v_2 dopo l'urto. Analogamente all'equazione 9 si ottiene per i momenti angolari:

$$m_k I_k v_0 = m_k I_k v_2 + I_p \omega$$

⇔

$$v_2 = v_0 - \frac{I_p \omega}{m_k I_k} \quad (14)$$

- Se questa velocità v_2 viene inserita nella legge della conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2} m_k v_0^2 = \frac{1}{2} m_k v_2^2 + \frac{1}{2} I_p \omega^2 \quad (15)$$

dopo alcune conversioni si ottiene:

$$v_0 = \frac{1}{2} \omega I_k \left(1 + \frac{I_p}{m_k I_k^2} \right) \quad (16)$$

- Se in questo caso viene inserita anche l'equazione 13 e I_p viene determinato analogamente all'equazione 12, v_0 può essere calcolato per un urto completamente elastico:

| N. | m_k / kg | m_p / kg | l_s / m | T / s | v_0 in m/s |
|----|-------------------|-------------------|------------------|----------------|--------------|
| 7 | 0,00695 | 0,0560 | 0,211 | 1,008 | 2,88 |
| 8 | 0,00695 | 0,0560 | 0,211 | 1,008 | 4,05 |
| 9 | 0,00695 | 0,0560 | 0,211 | 1,008 | 5,65 |

¹ Recknagel, A.: Physik Mechanik, 3te Auflage, VEB Verlag Technik Berlin, 1958.

- Questi valori per v_0 sono inferiori di circa il 18% rispetto ai valori determinati dall'urto plastico, aspetto che va ricondotto al fatto che l'urto non scorre in modo completamente elastico.

4.2 Determinazione delle parabole di lancio

4.2.1 Struttura dell'esperimento

- Una possibile struttura dell'esperimento è rappresentata schematicamente in fig. 3 (non in scala). I fori presenti nella piastra di supporto del pendolo sono disposti in modo tale che in caso di lancio diretto sul piano di lavoro si ottengono le altezze di lancio 50, 100, 150, 200 e 300 mm.

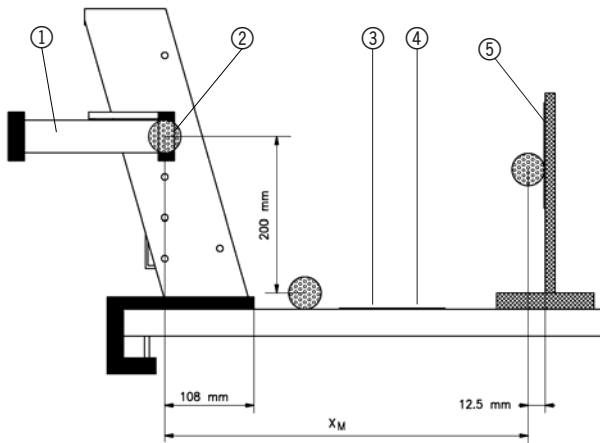


Fig. 3: Struttura dell'esperimento, Legenda: ① apparecchio di lancio, ② posizione di lancio della sfera, ③ carta, ④ carta carbone, ⑤ ad es. supporto per lavagna con lavagna bianca da parete

- In caso di lancio contro una parete verticale (ad es. lavagna bianca da parete U10030 montata sul supporto per lavagna U10381) dalla distanza orizzontale "punto di lancio fino alla parete" deve essere sottratto il raggio della sfera (1,25 cm) per ottenere il valore della distanza x_M . Il valore misurato dell'altezza y_M relativo all'altezza di lancio si ottiene dalla distanza "punto di impatto sulla parete - tavolo" meno 62,5 mm, 112,5 mm, 162,5 mm, 212,5 mm e 312,5 in base al foro utilizzato di volta in volta.

4.1.2 Esecuzione dell'esperimento

- È opportuno annotare durante gli esperimenti il numero dell'esperimento, il tensionamento della molla (1, 2 o 3), l'angolo di lancio e i valori x_M e y_M . Esempio:

| N. | Tensionamento molla | Angolo - di lancio $\varphi / ^\circ$ | Gittata x_M / cm | Altezza bersaglio y_M / cm |
|----|---------------------|---------------------------------------|---------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 1 | 0 | 171,3 | -30 |
| 2 | 2 | 0 | 125,4 | -30 |
| 3 | 3 | 0 | 86,9 | -30 |
| 4 | 1 | 0 | 62,3 | -15 |
| 5 | 2 | 0 | 90,5 | -15 |
| 6 | 3 | 0 | 120,7 | -15 |

4.1.3 Analisi dell'esperimento

- L'origine del sistema di coordinate viene opportunamente posizionata al centro della sfera durante il lancio. Quindi vale:

$$v_x = v_0 \cos \varphi \quad (17)$$

$$v_y = v_0 \sin \varphi \quad (18)$$

$$y = v_y t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (19)$$

$$x = v_x t \quad (20)$$

Dall'equazione 20 ne consegue direttamente $t = x / v_x$, con cui può essere eliminato il tempo presente nell'equazione 19.

- Se nell'equazione così ottenuta vengono eliminate anche le grandezze v_x e v_y utilizzando le equazioni 17 e 18, si ottiene con

$$y = x \tan \varphi - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} \quad (21).$$

l'equazione della parabola di lancio.

- In questa equazione non si conosce ancora tuttavia la velocità iniziale v_0 , poiché negli esperimenti sono stati misurati i percorsi x e y . Se il valore v_0 viene determinato per i diversi esperimenti, si ottiene:

| Tensionamento molla | v_0 in m/s |
|---------------------|--------------|
| 1 | 3,53 |
| 2 | 5,10 |
| 3 | 6,85 |

- Questi valori numerici si basano complessivamente su 25 esperimenti, dei quali nella tabella sopra riportata ne vengono indicati solo 6 in modo esplicito. Con questi valori ora è possibile calcolare le parabole di lancio in base all'equazione 21 e metterle a confronto con i valori misurati. Il risultato è rappresentato nella fig. 4.

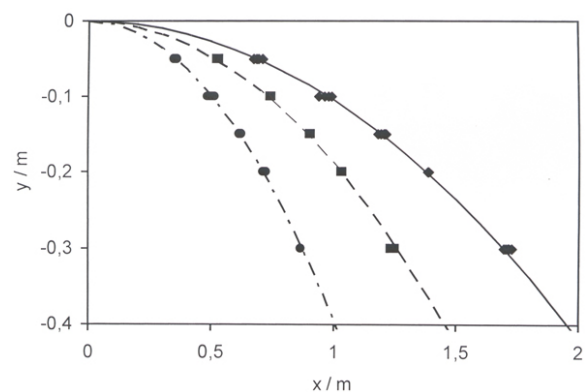


Fig. 4: Valori misurati e calcolo comparativo, x = ampiezza di lancio, y = altezza di lancio, simboli = valori misurati (cerchi = tensionamento molla 1, quadrati = tensionamento molla 2, rombi = tensionamento molla 3), linee = parabole calcolate

U10362 Péndulo balístico

Instrucciones de uso

9/04 MH

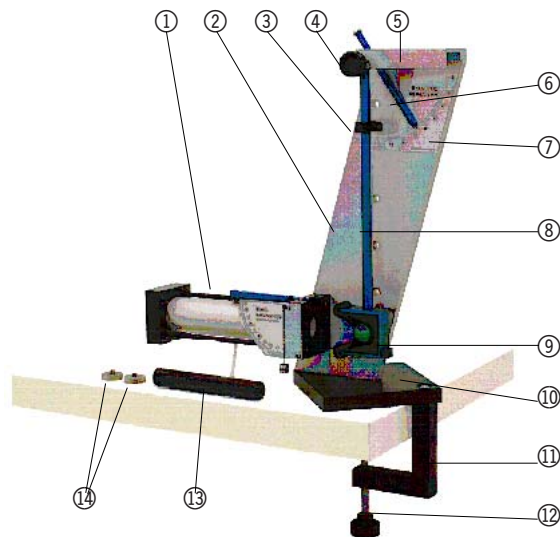


Fig. 1: componentes

- ① Equipo de lanzamiento (U10360)
- ② Placa portadora
- ③ Arrastrador para indicador de seguimiento
- ④ Tornillo de cojinete
- ⑤ Contrasoporte
- ⑥ Indicador de seguimiento
- ⑦ Escala angular
- ⑧ Péndulo
- ⑨ Receptor de bolas
- ⑩ Placa base
- ⑪ Abrazadera de mesa
- ⑫ Tornillo moleteado
- ⑬ Barra de carga (con U10360)
- ⑭ Pesas adicionales, 2 piezas

1. Aviso de seguridad

- En estas instrucciones de servicio sólo se tratará esencialmente el péndulo balístico, pero también se deben tomar en cuenta las instrucciones de servicio del equipo de lanzamiento U10360.
- Para comprobar si una bola se encuentra dentro del equipo de lanzamiento y el muelle tensado, se deben emplear únicamente los agujeros laterales de observación. Se prohíbe mirar de frente en la boca de disparo. ¡Peligro de heridas!
- ¡Jamás se debe apuntar a personas!
- Durante los experimentos, se debe llevar gafas de protección.
- El equipo de lanzamiento siempre se debe guardar con el muelle no tensado y sin proyectil cargado.

2. Descripción

- El péndulo balístico sirve para la experimentación experimental sobre la velocidad inicial de la bola durante su salida del equipo de lanzamiento. Además, se pueden determinar las parábolas de lanzamiento producidas por disparos horizontales u oblicuos, para lo cual las alturas de lanzamiento de 5, 10, 15, 20 y 30 cm se pueden ajustar, sencillamente, por medio de las perforaciones predeterminadas para tal efecto.

- Gracias a que el péndulo es extremadamente liviano, es posible realizar los experimentos con bolas de plástico en lugar de hacerlo con bolas de acero, lo cual, comparativamente, no representa ningún peligro. Aquí resultan evaluables tanto los experimentos sobre choque plástico (cuantitativamente) así como elástico (cualitativamente). Las velocidades de la bola determinadas en los experimentos de lanzamiento concuerdan de manera típica en aproximadamente un 3 % con relación a los experimentos pendulares.
- Por medio de las pesas adicionales, se pueden examinar diferentes toques pendulares con una velocidad de bola constante.

3. Servicio y mantenimiento

- En primer lugar, el péndulo balístico se atornilla con la abrazadera de mesa a una placa de trabajo estable. A continuación, se atornilla el equipo de lanzamiento horizontalmente, por delante del péndulo, como se muestra en la Fig. 1, o, como se puede observar en la Fig. 3, por detrás de la placa portadora ②.
- Consejo:** Si la placa de trabajo no es lo suficientemente estable, puede ocurrir que una vez que el péndulo haya llegado al tope máximo e inicie su retorno se produzca un empujón por el choque

contra el equipo de lanzamiento, lo cual puede conducir a que el indicador de seguimiento se desajuste. En este caso, se debe detener el péndulo con la mano.

- Cuando se carga una bola, el muelle debe encontrarse siempre libre de tensión; para la carga, la bola se suelta en la parte interior del cilindro de plástico. A continuación, se empuja la bola hacia dentro del cuello, con la barra de carga, hasta que se alcance la tensión de muelle deseada. La barra de carga no se debe retirar muy rápidamente, puesto que de otra manera, la absorción producida podría arrastrar consigo la bola. Un control de la posición de la bola sólo se debe realizar por medio de los agujeros laterales de observación. ¡Jamás se debe mirar dentro del cuello!
- Antes de realizar el disparo, se debe asegurar que ninguna persona se encuentre en la trayectoria de lanzamiento. Para el disparo, se tira brevemente de la cuerda del gatillo, lo cual se debe realizar aproximadamente en dirección vertical, con relación a la palanca.
- El péndulo ⑧ se puede desmontar aflojando los tornillos de cojinete ④ y, para volver a montarlo, debe estar girado en 180°, con el lado posterior del receptor de bolas ⑨ señalando hacia el equipo de lanzamiento (experimento de choque elástico). El contrasoporte ⑤ está construido de manera que el péndulo penda de una manera un poco oblicua si los tornillos de cojinete están ligeramente apretados, con lo que el receptor de bolas no se encontrará exactamente frente a la boca de disparo del equipo de lanzamiento. Por lo tanto, se debe apretar el tornillo de cojinete hasta que el receptor de la bola y la boca de disparo se encuentren alineados.
- Después de girar el péndulo, o en el caso de que sea necesario, se debe ajustar el arrastrador ③ del indicador de seguimiento ⑥, de manera que el péndulo toque apenas a este último cuando penda en reposo. El tornillo del arrastrador sólo se debe girar con los dedos para evitar mellas de presión en la barra del péndulo.
- **Mantenimiento:** En principio, el péndulo balístico no necesita mantenimiento. De ser necesario, se puede aplicar algo de grasa libre de ácido (vaselina) al tornillo de cojinete ④ y al tornillo moleteado ⑫. La parte exterior de la escala, dado el caso, se puede limpiar con acetona, etanol (alcohol) o gasolina de lavado. Se debe evitar el sumergimiento en agua.

4. Ejecución y evaluación del experimento

4.1 Péndulo balístico

4.1.1 Montaje experimental

- Para los experimentos sobre choques plásticos, el montaje corresponde al de la Fig. 1. Para los experimentos de choques elásticos, se debe girar el péndulo 180° (compárese apartado 3 «Servicio»).

4.1.2 Ejecución de experimento

- Durante las pruebas, es oportuno anotar el número de experimento, la tensión del muelle (1, 2 ó 3), el tipo de choque (plástico «p» o elástico «e»), la cantidad de pesas adicionales empleadas así como el valor angular medido φ . Para que los resultados experimentales sean lo más posible exactos, después del primer disparo, se debe realizar otro sin permitir que el indicador de seguimiento retorne a 0°. De esta manera, se pueden minimizar las inevitables pérdidas por fricción del indicador de seguimiento.
- Ejemplo de una serie experimental:

| N° | Tensión de muelle | Tipo de choque | Pesas adicionales | Ángulo φ |
|----|-------------------|----------------|-------------------|------------------|
| 1 | 1 | p | 0 | 17,5 |
| 2 | 2 | p | 0 | 25,0 |
| 3 | 3 | p | 0 | 36,0 |
| 4 | 1 | p | 2 | 9,5 |
| 5 | 2 | p | 2 | 13,5 |
| 6 | 3 | p | 2 | 19,0 |
| 7 | 1 | e | 0 | 29,5 |
| 8 | 2 | e | 0 | 42,0 |
| 9 | 3 | e | 0 | 60,0 |

4.1.3 Evaluación del experimento

4.1.3.1 Choque plástico

- Para el péndulo en oscilación es válida la ley de conservación de la energía de la siguiente fórmula:

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{cin}} \quad (1)$$

en donde es válida la energía potencial

$$E_{\text{pot}} = m_{\text{tot}} g \Delta h \quad (2)$$

Aquí, m_{tot} es el peso total del péndulo, lo cual incluye la bola y, dado el caso, las pesas adicionales; g es la aceleración terrestre y Δh es la diferencia de altura del punto centro de gravedad del péndulo entre la posición en reposo y la desviación máxima.

- Con el ángulo φ medido y la longitud del punto de gravedad l_s medida, como se muestra en la fig. 2, se obtiene:

$$\Delta h = l_s (1 - \cos \varphi) \quad (3)$$

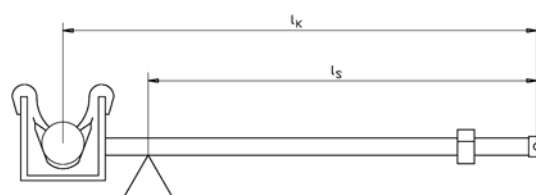


Fig. 2: Longitudes necesarias para la evaluación. La distancia «Punto de gravedad – centro de rotación» (l_s), en caso de choque plástico, se debe medir incluyendo la bola y las pesas adicionales. Para la medición se pueden balancear, por ejemplo, sobre una regla colocada de pie. La distancia «Centro de la bola – centro de rotación» es de $l_k = 280$ mm.

- La energía cinética se calcula con el momento de inercia I_{tot} , respecto al centro de rotación del péndulo, y la velocidad angular máxima ω de acuerdo con

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} I_{\text{tot}} \omega^2 \quad (4)$$

- Si se emplean las ecuaciones 2 y 4, en la ecuación 1, y se elimina el valor Δh mediante la ecuación 3, entonces, después de la conversión, se deduce:

$$\omega = \sqrt{\frac{2 m_{\text{tot}} g l_s (1 - \cos \varphi)}{I_{\text{tot}}}} \quad (5)$$

- Pero lo que se busca no es ω , sino la velocidad inicial v_0 de la bola. La relación entre ambas magnitudes se obtiene a partir de la ley de conservación del impulso de rotación (preservación de torcimiento) directamente antes y después del choque:

$$L_k = L_{\text{tot}} \quad (6)$$

con el «movimiento rotatorio» de la bola

$$L_k = m_k I_k v_0 \quad (7)$$

antes del choque y el movimiento rotatorio total

$$L_{\text{tot}} = I_{\text{tot}} \omega \quad (8)$$

después del choque. Al introducir la ecuación 7 y 8 en la ecuación 6 se obtiene

$$m_k I_k v_0 = I_{\text{tot}} \omega \quad (9)$$

- Después de despejar ω y comparar con la ecuación 5 se llega a la relación buscada

$$v_0 = \frac{1}{m_k I_k} \sqrt{2 I_{\text{tot}} m_{\text{tot}} g l_s (1 - \cos \varphi)} \quad (10)$$

- En principio, el momento de inercia se debe determinar de acuerdo con

$$I_{\text{tot}} = \int_m I^2 dm \quad (11)$$

tomando en cuenta que I es la distancia respectiva de un elemento de masa dm en relación al punto de rotación. Dado que aquí no se desea determinar los momentos de inercia, I_{tot} se puede calcular a partir de la duración de oscilación T del péndulo (con la bola y, dado el caso, con pesas adicionales). Para un péndulo físico, tratándose de oscilaciones reducidas es válido¹:

$$I_{\text{tot}} = m_{\text{tot}} g l_s \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \quad (12)$$

- Con ello, todas las magnitudes son conocidas o calculables. Para el ejemplo anterior se obtiene:

| Nº | m_k / kg | m_{tot} / kg | I_s / m | T / s | v_0 en m/s |
|----|------------|-----------------------|-----------|---------|--------------|
| 1 | 0,00695 | 0,06295 | 0,218 | 1,01 | 3,39 |
| 2 | 0,00695 | 0,06295 | 0,218 | 1,01 | 4,82 |
| 3 | 0,00695 | 0,06295 | 0,218 | 1,01 | 6,88 |
| 4 | 0,00695 | 0,09795 | 0,252 | 1,07 | 3,51 |
| 5 | 0,00695 | 0,09795 | 0,252 | 1,07 | 4,98 |
| 6 | 0,00695 | 0,09795 | 0,252 | 1,07 | 6,99 |

- Los valores se deben determinar individualmente para cada péndulo, puesto que debido a las tolerancias de fabricación y de material se podrían producir divergencias.

4.1.3.2 Choque elástico

- Para el péndulo que entra en oscilación después del choque, sigue siendo válida la ecuación 5, con la diferencia de que aquí se debe tomar en cuenta el momento de inercia del péndulo sin bola I_p , pero, dado el caso, con pesas adicionales (masa del péndulo m_p):

$$\omega = \sqrt{\frac{2 m_p g l_s (1 - \cos \varphi)}{I_p}} \quad (13)$$

- Para determinar la relación entre ω y la velocidad de inicio v_0 ahora se cuenta tanto con la ley del impulso de rotación así como con la ley de conservación de energía, cada una antes y después del choque. La otra ecuación también es necesaria debido a que el sistema tiene otro grado de libertad: la velocidad de la bola v_2 después del choque. De forma análoga a la ecuación 9 se obtiene para el impulso de rotación:

$$m_k I_k v_0 = m_k I_k v_2 + I_p \omega$$

⇔

$$v_2 = v_0 - \frac{I_p \omega}{m_k I_k} \quad (14)$$

- Si se aplica esta velocidad v_2 en la ley de conservación de energía

$$\frac{1}{2} m_k v_0^2 = \frac{1}{2} m_k v_2^2 + \frac{1}{2} I_p \omega^2 \quad (15)$$

después de algunas transformaciones se obtiene:

$$v_0 = \frac{1}{2} \omega I_k \left(1 + \frac{I_p}{m_k I_k^2} \right) \quad (16)$$

- Si, además, se aplica la ecuación 13 e I_p se determina de forma análoga a la ecuación 12, se puede calcular el valor de v_0 para un choque elástico perfecto:

| Nº | m_k / kg | m_p / kg | I_s / m | T / s | v_0 en m/s |
|----|------------|------------|-----------|---------|--------------|
| 7 | 0,00695 | 0,0560 | 0,211 | 1,008 | 2,88 |
| 8 | 0,00695 | 0,0560 | 0,211 | 1,008 | 4,05 |
| 9 | 0,00695 | 0,0560 | 0,211 | 1,008 | 5,65 |

¹ Recknagel, A.: Physik Mechanik, 3te Auflage, VEB Verlag Technik Berlin, 1958.

- Estos valores de v_0 son aproximadamente 18% menores que los obtenidos con el choque plástico, hecho atribuible a que el choque no fue completamente elástico.

4.2 Determinación de parábolas de lanzamiento

4.2.1 Montaje experimental

- En la Fig. 3 se representa esquemáticamente un posible montaje experimental (la imagen no corresponde a valores de escala) Las perforaciones de la placa soporte del péndulo están dispuestas de manera que, tras un lanzamiento directo sobre la placa de trabajo, se obtengan alturas de 50, 100, 150, 200 y 300 mm.

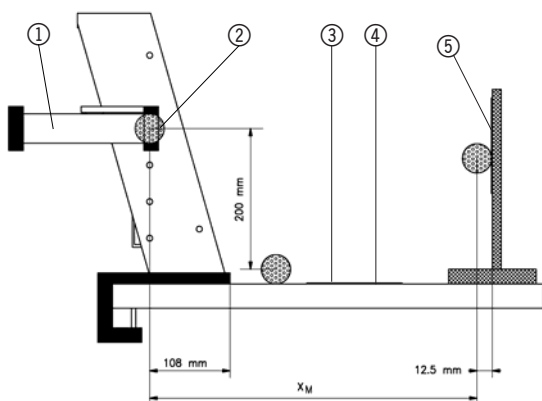


Fig. 3: Montaje experimental, leyenda: ① equipo de lanzamiento, ② posición de lanzamiento de la bola, ③ papel, ④ papel carbón, ⑤ p. ej., soporte de tablero con placa blanca de pared

- Durante un lanzamiento contra una pared vertical (p. ej. tablero blanco de pared U10030, montado en el soporte para tablero de metal U10381) se debe deducir de la distancia horizontal «punto de disparo hasta la pared» el radio de la bola (1,25 cm) para obtener, de esta manera, el valor de medida de distancia x_M . El valor medido de altura y_M , relativo a la altura de disparo, se obtiene a partir de la distancia entre «punto de impacto en la pared y placa de mesa» menos 62,5 mm, 112,5 mm, 162,5 mm, 212,5 mm ó 312,5 mm de acuerdo con la perforación empleada.

4.1.2 Ejecución del experimento

- Durante los experimentos, es estrictamente necesario anotar el número de experimento, la tensión del muelle (1, 2 ó 3), el ángulo de lanzamiento así como los valores x_M y y_M . Ejemplo:

| Nº | Tensión del muelle | Ángulo de lanz. $\varphi / ^\circ$ | Ángulo de disparo x_M / cm | Altura del blanco y_M / cm |
|----|--------------------|------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 1 | 0 | 171,3 | -30 |
| 2 | 2 | 0 | 125,4 | -30 |
| 3 | 3 | 0 | 86,9 | -30 |
| 4 | 1 | 0 | 62,3 | -15 |
| 5 | 2 | 0 | 90,5 | -15 |
| 6 | 3 | 0 | 120,7 | -15 |

4.1.3 Evaluación del experimento

- El origen del sistema de coordenadas se ubica necesariamente en el punto central de la bola durante el disparo. Entonces es válido lo siguiente:

$$v_x = v_0 \cos \varphi \quad (17)$$

$$v_y = v_0 \sin \varphi \quad (18)$$

$$y = v_y t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (19)$$

$$x = v_x t \quad (20)$$

De la ecuación 20 se obtiene directamente $t = x / v_x$, con lo que se puede eliminar el tiempo en la ecuación 19.

- Si en las ecuaciones así obtenidas, se eliminan las magnitudes v_x y v_y , empleando las ecuaciones 17 y 18, se obtiene:

$$y = x \tan \varphi - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} \quad (21),$$

esto es, la ecuación de la parábola de lanzamiento.

- En esta ecuación, se desconoce todavía la velocidad inicial v_0 , puesto que en los experimentos se midieron los desplazamientos x y y . Si, para los diferentes experimentos, se determina v_0 , se obtiene:

| Tensión de muelle | v_0 en m/s |
|-------------------|--------------|
| 1 | 3,53 |
| 2 | 5,10 |
| 3 | 6,85 |

- Estos valores se basan en un total de 25 experimentos, de los cuales, en la tabla anterior, sólo 6 se han anotado explícitamente. Por medio de estos valores, se pueden calcular ahora parábolas de lanzamiento de acuerdo con la ecuación 21, y comparar además los valores medidos. El resultado se representa en la Fig. 4.

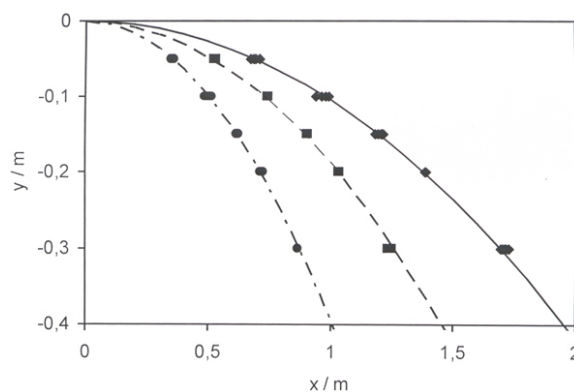


Fig. 4: Comparación de valores medidos y calculados, x = alcance de vuelo, y = altura de vuelo, símbolos = valores medidos (círculos = tensión de muelle 1, rectángulos = tensión de muelle 2, rombos = tensión de muelle 3), líneas = parábolas calculada

U10362 Pêndulo balístico

Manual de instruções

9/04 MH

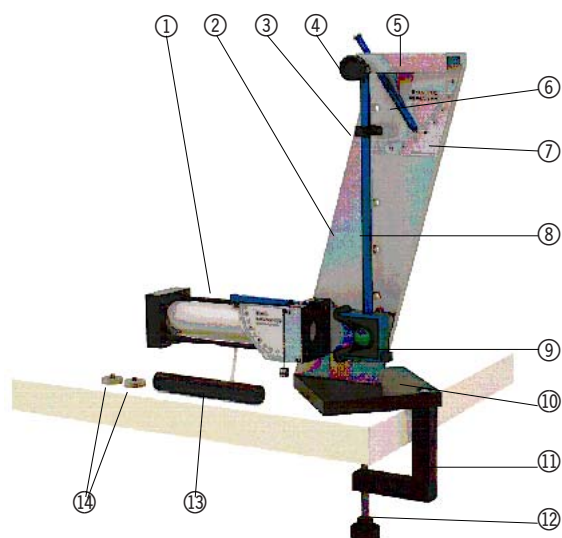


Fig. 1: componentes

- ① Dispositivo de lançamento (U10360)
- ② Placa de suporte
- ③ Transmissão para o indicador de arraste
- ④ Parafuso do eixo
- ⑤ Apoio do eixo
- ⑥ Indicador de arraste
- ⑦ Escala angular
- ⑧ Pêndulo
- ⑨ Receptor de bolas
- ⑩ Placa base
- ⑪ Pinça de fixação de mesa
- ⑫ Parafuso de fixação
- ⑬ Vara de carregamento (no U10360)
- ⑭ Pesos adicionais, 2 unidades

1. Indicações de segurança

- Neste manual de instruções será tratado em essência do pêndulo balístico, mas o manual de instruções do dispositivo de lançamento U10360 também deve ser levado em conta.
- Para comprovar se há uma bola dentro do dispositivo de lançamento e se a mola está tensa, só devem ser utilizadas as perfurações de observação. É terminantemente proibido olhar para dentro do cano pela abertura. Perigo de ferimento!
- Nunca apontar em pessoas!
- Durante as experiências deve-se utilizar óculos de proteção.
- Armazenar o dispositivo de lançamento sempre com a mola distendida e sem bola no cano.

2. Descrição

- O pêndulo balístico serve para a determinação experimental da velocidade inicial da bola ao sair do dispositivo de lançamento. Além disso, podem ser determinadas parábolas de lançamento em lançamentos horizontais ou inclinados, sendo que alturas de lançamento de 5, 10, 15, 20 e 30 cm podem ser facilmente ajustadas por meio das perfurações previstas para tal.

- Graças à extrema leveza do pêndulo, as experiências podem ser realizadas com bolas de plástico comparativamente inofensivas em vez de bolas de metal. Sendo que tanto experiências com as qualidades plásticas (quantitativas) quanto com a colisão elástica (qualitativas) são analisáveis. As velocidades comprovadas nas experiências de lançamento e de pêndulo coincidem tipicamente com desvio de aproximadamente 3%.
- Por meio de pesos adicionais podem ser analisadas diferentes forças de impulso com velocidade constante da bola.

3. Utilização e manutenção

- Primeiro deve-se fixar o pêndulo balístico numa mesa de trabalho estável. Logo, aparafusa-se o dispositivo de lançamento na horizontal antes do pêndulo como é mostrado na Fig. 1, ou por trás na placa de suporte ② como na Fig. 3.
Dica: se a mesa de trabalho não for suficientemente estável, pode ocorrer que ao aplicar o golpe mais forte do pêndulo, que a própria força do mesmo ao bater afete o dispositivo de lançamento e leve a um desajuste do indicador de arraste. Neste caso, o pêndulo deverá ser agarrado com a mão.

- O carregamento com uma bola sempre ocorre com a mola distendida, colocando-se a bola solta no interior do cilindro de material plástico. Depois, empurra-se a bola no cano com a vara de carregamento até atingir-se a tensão de mola desejada. A vara de carregamento deve ser retirada lentamente, já que senão a aspiração ao retirá-la poderia levar a bola junto. O controle da posição da bola só deve acontecer pelas perfurações de observação laterais. Nunca olhe para dentro do cano!
- Antes do lançamento deve-se garantir que não se encontrem pessoas na linha de voo. Para efetuar o lançamento, puxa-se a corda da alavanca de lançamento, sendo que deve-se puxar a corda na perpendicular da alavanca de lançamento.
- O pêndulo ③ pode ser desmontado soltando o parafuso de eixo ④, girando em 180° para voltar montá-lo com as partes traseira do receptor de bolas ⑤ virado para o dispositivo de lançamento (experiências com a colisão elástica). O apoio do eixo ⑤ é construído de modo que com o parafuso de eixo só levemente apertado ele fica pendurado meio inclinado, pelo que o receptor de bola não de encontra exatamente na abertura o dispositivo de lançamento. Por isso deve-se apertar o parafuso de eixo até que o receptor de bolas e a abertura coincidam.
- Após a inversão do pêndulo, ou caso seja necessário, deve-se ajustar o transmissor ③ para o indicador de arraste ⑥ de modo que ele apenas toque o indicador de arraste quando estiver em repouso. O parafuso do transmissor só deve ser girada com os dedos para evitar esforço excessivo na barra do pêndulo.
- **Manutenção:** o pêndulo balístico, em princípio, não precisa de manutenção. Caso seja necessário pode-se utilizar um pouco de gordura não ácida (vaselina) no parafuso de eixo ④ e no parafuso de fixação ⑫. Com exceção da área da escala pode-se limpar, conforme o caso, com acetona, álcool caseiro ou benzina caseira. A imersão na água deve ser evitada.

4. Execução e análise da experiência

4.1 Pêndulo balístico

4.1.1 Montagem da experiência

- A montagem da experiência corresponde à ilustr. 1 para experiência com colisão elástica. Para experiências com a colisão elástica, deve-se girar o pêndulo em 180° (comparar parágrafo “utilização”).

4.1.2 Execução da experiência

- Durante as experiências, é de utilidade anotar o número da experiência, a tensão da mola (1, 2 ou 3), o tipo de colisão (plástica “*p*” ou elástica “*e*”), o número de pesos adicionais utilizados, assim como o valor angular medido φ . Para se obter resultados o mais precisos possível, deve-se efetuar um outro lançamento após o primeiro,

onde o indicador de arraste não tenha sido levado previamente ao 0°. Deste modo são reduzidas as inevitáveis perdas por atrito do indicador de arraste.

- Exemplo de uma série de experiências:

| Nº | Tensão da mola | Tipo de colisão | Pesos adicionais | Ângulo φ |
|----|----------------|-----------------|------------------|------------------|
| 1 | 1 | <i>p</i> | 0 | 17,5 |
| 2 | 2 | <i>p</i> | 0 | 25,0 |
| 3 | 3 | <i>p</i> | 0 | 36,0 |
| 4 | 1 | <i>p</i> | 2 | 9,5 |
| 5 | 2 | <i>p</i> | 2 | 13,5 |
| 6 | 3 | <i>p</i> | 2 | 19,0 |
| 7 | 1 | <i>e</i> | 0 | 29,5 |
| 8 | 2 | <i>e</i> | 0 | 42,0 |
| 9 | 3 | <i>e</i> | 0 | 60,0 |

4.1.3 Análise da experiência

4.1.3.1 Colisão plástica

- Para o pêndulo em oscilação é válida a Lei de conservação da energia na forma:

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{cin}} \quad (1)$$

sendo válido para a energia potencial

$$E_{\text{pot}} = m_{\text{tot}} g \Delta h \quad (2)$$

Aqui é m_{tot} a massa total do pêndulo incluindo a bola e, se for o caso, os pesos adicionais, g é a aceleração da gravidade da terra e Δh é a diferença de altura do centro de gravidade do pêndulo entre a posição de repouso e a oscilação máxima.

- Com o ângulo φ medido e o comprimento de centro de gravidade medido l_s , conforme a Fig. 2 resulta:

$$\Delta h = l_s (1 - \cos \varphi) \quad (3)$$

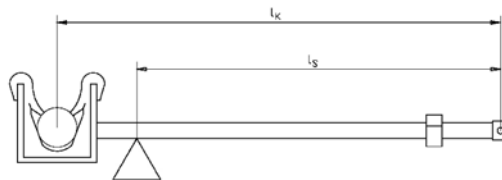


Fig. 2: sobre o cálculo dos comprimentos necessários. A distância “centro de gravidade - ponto de rotação” (l_s) deve ser medida incluindo a bola e os pesos adicionais para o cálculo da colisão plástica. Para a medição, o pêndulo pode ser balanceado com uma régua colocada de pé, por exemplo. A distância “centro da bola - ponto de rotação” é de $l_k = 280$ mm.

- A energia cinética é calculada com o momento de inércia I_{tot} relativa ao ponto de rotação do pêndulo e à velocidade angular máxima ω conforme

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} I_{\text{tot}} \omega^2 \quad (4)$$

- Se as equações 2 e 4 são aplicadas a equação 1 e Δh é eliminado pela equação 3, então decorre, após reformulação:

$$\omega = \sqrt{\frac{2m_{\text{tot}} g l_s (1 - \cos \varphi)}{I_{\text{tot}}}} \quad (5)$$

- O que se procura, no entanto, não é ω , mas é a velocidade inicial da bola v_0 . A relação entre as duas grandezas resulta da Lei de conservação do impulso rotativo imediatamente antes e depois da colisão:

$$L_k = L_{\text{tot}} \quad (6)$$

com o impulso da bola

$$L_k = m_k l_k v_0 \quad (7)$$

antes da colisão e do impulso total

$$L_{\text{tot}} = I_{\text{tot}} \omega \quad (8)$$

após a colisão. Aplicação da equação 7 e 8 na equação 6 resulta em

$$m_k l_k v_0 = I_{\text{tot}} \omega \quad (9)$$

- Isto resolvido conforme ω e igualado pela equação 5 leva à relação procurada

$$v_0 = \frac{1}{m_k l_k} \sqrt{2 I_{\text{tot}} m_{\text{tot}} g l_s (1 - \cos \varphi)} \quad (10)$$

- O momento de inércia é em princípio calculável segundo

$$I_{\text{tot}} = \int_m l^2 dm \quad (11)$$

sendo que l é a distância de cada elemento de massa dm do ponto de rotação. Já que aqui o objetivo da observação não é a determinação de momentos de inércia, I_{tot} pode-se calcular também a partir da duração do percurso do pêndulo T (com bola e conforme o caso, pesos adicionais). Para um pêndulo físico é válido para pequenas oscilações¹:

$$I_{\text{tot}} = m_{\text{tot}} g l_s \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \quad (12)$$

- Com isto, todas as grandezas necessárias são conhecidas ou calculáveis. Para exemplo acima, resulta:

| N° | m_k / kg | $m_{\text{tot}} / \text{kg}$ | l_s / m | T / s | v_0 em m/s |
|----|-------------------|------------------------------|------------------|----------------|--------------|
| 1 | 0,00695 | 0,06295 | 0,218 | 1,01 | 3,39 |
| 2 | 0,00695 | 0,06295 | 0,218 | 1,01 | 4,82 |
| 3 | 0,00695 | 0,06295 | 0,218 | 1,01 | 6,88 |
| 4 | 0,00695 | 0,09795 | 0,252 | 1,07 | 3,51 |
| 5 | 0,00695 | 0,09795 | 0,252 | 1,07 | 4,98 |
| 6 | 0,00695 | 0,09795 | 0,252 | 1,07 | 6,99 |

- Os valores numéricos devem ser calculados individualmente para cada pêndulo, já que desvios podem ocorrer dentro da tolerância do material e da fabricação.

4.1.3.2 Colisão elástica

- Para o pêndulo em oscilação após a colisão continua válida a equação 5 com a diferença que aqui, deve-se levar em conta o momento de inércia do pêndulo sem bola I_p , mas caso couber, com os pesos adicionais (massa pendular m_p):

$$\omega = \sqrt{\frac{2 m_p g l_s (1 - \cos \varphi)}{I_p}} \quad (13)$$

- Para calcular a relação entre ω e a velocidade inicial v_0 dispõe-se agora da Lei de conservação do impulso rotativo e a Lei de conservação da energia, cada uma imediatamente antes e depois da colisão. A equação a seguir também é necessária, já que o sistema tem ainda mais uma variável: a velocidade da bola v_2 após a colisão. Analogamente à equação 9, resulta para o impulso rotativo:

$$m_k l_k v_0 = m_k l_k v_2 + I_p \omega$$

\Leftrightarrow

$$v_2 = v_0 - \frac{I_p \omega}{m_k l_k} \quad (14)$$

- Se esta velocidade v_2 é aplicada na Lei de conservação da energia

$$\frac{1}{2} m_k v_0^2 = \frac{1}{2} m_k v_2^2 + \frac{1}{2} I_p \omega^2 \quad (15)$$

resulta então, após algumas reformulações, o valor para

$$v_0 = \frac{1}{2} \omega l_k \left(1 + \frac{I_p}{m_k l_k^2} \right) \quad (16)$$

- Se aqui for ainda aplicada a equação 13 e I_p determinado de forma análoga à equação 12, então v_0 calculável para uma colisão completamente elástica:

| N° | m_k / kg | m_p / kg | l_s / m | T / s | v_0 em m/s |
|----|-------------------|-------------------|------------------|----------------|--------------|
| 7 | 0,00695 | 0,0560 | 0,211 | 1,008 | 2,88 |
| 8 | 0,00695 | 0,0560 | 0,211 | 1,008 | 4,05 |
| 9 | 0,00695 | 0,0560 | 0,211 | 1,008 | 5,65 |

¹ Recknagel, A.: Physik Mechanik, 3te Auflage, VEB Verlag Technik Berlin, 1958.

- Estes valores para v_0 são menores em aprox. 18% do que os calculados na colisão elástica, o que leva a concluir que a colisão não ocorre de forma totalmente elástica.

4.2 Cálculo de parábolas de lançamento

4.2.1 Montagem da experiência

- Uma montagem possível está representada de forma esquemática na ilustração 3 (não proporcional). As perfurações na placa suporte do pêndulo estão previstas para que ao lançar, resultem alturas de lançamento diretamente acima da placa suporte de 50, 100, 150, 200 e 300 mm.

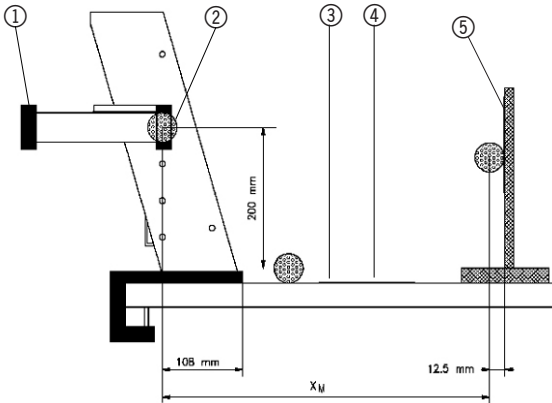


Fig. 3: montagem da experiência, legenda: ① dispositivo de lançamento, ② posição de lançamento da bola, ③ papel, ④ papel carbono, ⑤ por exemplo, suporte de quadro com quadro branco

- No caso de um lançamento contra uma parede vertical (por ex. quadro branco U10030 montado no suporte U10381) deve-se deduzir o raio da bola (1,25 cm) da distância horizontal „ponto de lançamento até parede“ para se manter o valor de distância medido x_M . O valor medido de altura y_M relativa à altura de lançamento resulta da distância “ponto de colisão na parede até mesa de trabalho” menos 62,5 mm, 112,5 mm, 162,5 mm, 212,5 mm ou 312,5 mm, conforme a perfuração utilizada.

4.1.2 Execução da experiência

- Durante as experiências, é de utilidade anotar o número da experiência, a tensão da mola (1, 2 ou 3), o ângulo de lançamento, assim como os valores x_M e y_M . Exemplo:

| Nº | Tensão da mola | Ângulo de lanç. $\varphi / ^\circ$ | Distância do lanç. x_M / cm | Altura do alvo y_M / cm |
|----|----------------|------------------------------------|--------------------------------------|----------------------------------|
| 1 | 1 | 0 | 171,3 | -30 |
| 2 | 2 | 0 | 125,4 | -30 |
| 3 | 3 | 0 | 86,9 | -30 |
| 4 | 1 | 0 | 62,3 | -15 |
| 5 | 2 | 0 | 90,5 | -15 |
| 6 | 3 | 0 | 120,7 | -15 |

4.1.3 Análise da experiência

- A origem do sistema de coordenadas é colocada por praticidade no centro da bola no momento do lançamento. Então é válido:

$$v_x = v_0 \cos \varphi \quad (17)$$

$$v_y = v_0 \sin \varphi \quad (18)$$

$$y = v_y t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (19)$$

$$x = v_x t \quad (20)$$

Da equação 20 decorre diretamente $t = x / v_x$, com o que o tempo pode ser eliminado na equação 19.

- Se ainda por meio das equações 17 e 18 forem eliminados os valores v_x e v_y contidos na equação assim obtida, obtém-se com:

$$y = x \tan \varphi - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} \quad (21),$$

a equação da parábola do lançamento.

- Nesta equação só a velocidade inicial v_0 ainda é desconhecida, já que os percursos x e y foram medidos durante a experiência. Sendo v_0 determinada para as diferentes experiências, resulta:

| Tensão da mola | v_0 em m/s |
|----------------|--------------|
| 1 | 3,53 |
| 2 | 5,10 |
| 3 | 6,85 |

- Estes valores numéricos estão baseados num total de 25 experiências, das quais só 6 são citadas explicitamente acima. Com estes valores podem agora serem calculadas as parábolas de lançamento conforme a equação 21 e os valores medidos podem ser comparados. O resultado está representado na figura 4.

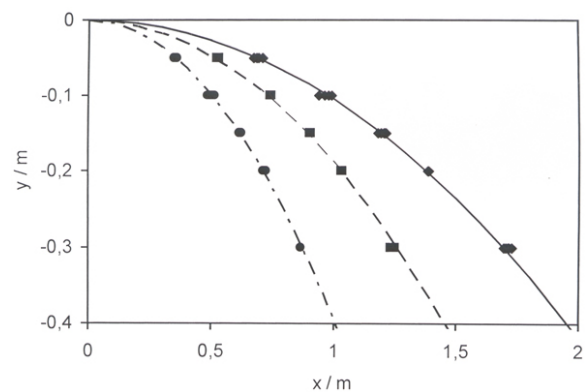


Fig. 4: comparação dos valores medidos e calculados, x = distância do voo, y = altura do voo, símbolos = valores medidos (círculos = tensão de mola 1, quadrados = tensão de mola 2, losangos = tensão de mola 3), linhas = parábolas calculadas